Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

fortgeführt von

C. W. Borchardt, K. Weierstrass, L. Kronecker,
L. Fuchs, K. Hensel, L. Schlesinger

gegenwärtig herausgegeben von

Helmut Hasse und Hans Rohrbach

unter Mitwirkung von

W. Brödel, M. Deuring, O. Haupt,
G. Köthe, W. Schmeidler

Band 196

In 4 Heften

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Berlin 1956

Archiv-Nr. 180356
Satz von Walter de Gruyter & Co., Berlin W 35
Druck von Buchkunst, Berlin W 35
Printed in Germany

Inhaltsverzeichnis des Bandes 196

Seite

Beyer, Gudrun, Über relativ-zyklische Erweiterungen galoisscher Körper . . 34

— —, Über eine Vermutung von Hasse zum Erweiterungsproblem galoisscher Zahlkörper 205

Bögel, K., Die Struktur der stetigen Funktionen einer Veränderlichen. I. . 1

— —, Die Struktur der stetigen Funktionen einer Veränderlichen. II. . . . 137

Eichler, Martin, Berichtigung zu der Arbeit „Über die Darstellbarkeit von Modulformen durch Thetareihen" 155

Engel, Wolfgang, Invariante Divisorenscharen bei endlichen Gruppen von Cremonatransformationen 59

Härtter, Erich, Ein Beitrag zur Theorie der Minimalbasen 170

Hayman, W. K., A Generalisation of Stirling's Formula 67

Hornfeck, Bernhard, Zur Struktur gewisser Primzahlsätze 156

Kneser, Martin, Orthogonale Gruppen über algebraischen Zahlkörpern . . . 213

Scherk, Peter, Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn Kanold 133

Stöhr, Alfred und **Eduard Wirsing,** Beispiele von wesentlichen Komponenten, die keine Basen sind 96

Wagner, Richard, Ein Kontaktproblem der konformen Abbildung 99

Wirsing, Eduard siehe **Stöhr, Alfred**

Ausgabedaten der Hefte von Bd. 196

Heft 1/2 ausgegeben am 31. August 1956

Heft 3/4 ausgegeben am 30. September 1956

Die Struktur der stetigen Funktionen einer Veränderlichen. I.

Von *K. Bögel* in Ilmenau.

Die Differentialstruktur der stetigen Funktionen einer Veränderlichen ist schon mehrfach untersucht worden, sehr eingehend insbesondere in zwei Abhandlungen von Herrn G. Faber[1]).

Diesen früheren Untersuchungen haftete ein gemeinsamer Nachteil an: sie gingen von einer gewissermaßen willkürlichen, nicht durch das Verhalten der Funktion bedingten Einteilung des Definitionsintervalles aus; dabei blieben einige wesentliche Eigenschaften der stetigen Funktionen verborgen.

Von solcher Willkürlichkeit frei sind die Untersuchungen und Ergebnisse von Herrn O. Haupt[2]), dem es gelang, einen von J. Hjelmslev[3]) für differenzierbare Kurven aufgestellten Struktursatz (mit den erforderlichen Hinzufügungen) auf die stetigen Kurven auszudehnen. Der Hauptsche Satz lautet:

Jeder stetige Kurvenbogen $x = x(t)$, $y = y(t)$ setzt sich aus höchstens abzählbar vielen Strecken, primitiven Bogen zweiter Ordnung („Konvexbogen") und primitiven Bogen der Ordnung Unendlich sowie den Häufungspunkten dieser Teilstücke zusammen.

Implizite enthält dieser Satz die Aussage, daß diejenigen Parameterwerte t, welche zu Kurvenpunkten der endlichen Ordnungen $n > 2$ gehören, im Variabilitätsbereich von t nirgends dicht liegen.

Die Aussage dieses Satzes ist eine Aussage im Großen; sie enthält nichts über die Feinstruktur der Kurve in den Bogenstücken der Ordnung Unendlich. Diese noch vorhandene Lücke füllt die vorliegende Arbeit, die übrigens in Unkenntnis des schönen Hauptschen Satzes entstanden war, für die Kurven der Form $y = f(x)$ aus.

Dieses Ziel erreichen wir, indem wir den Begriff des Punktes zweiter Ordnung, der ja verlangt, daß alle Punkte einer gewissen Umgebung ebenfalls Punkte zweiter Ordnung oder aber Streckenpunkte sind, durch den lokal definierten Begriff des *Hauptpunktes* ersetzen, der vom Charakter der umgebenden Punkte unabhängig und daher umfassender ist.

Nach zwei vorbereitenden Abschnitten (auf die wir nachher zu sprechen kommen) teilen wir daher in § 1 des dritten Abschnittes die Argumentwerte einer in einem Intervall endlichen Funktion (Stetigkeit wird dabei noch nicht vorausgesetzt) auf eindeutige Weise in *Linear-*, *Konvex-*, *Konkav-* und *Restpunkte* ein; die Konvex- und Konkavpunkte vereinigen wir sodann zur Menge der *Hauptpunkte*. Dabei bilden die Linearpunkte stets eine (evtl. leere) offene Menge.

[1]) *G. Faber*, Über stetige Funktionen. I., Math. Ann. **66** (1908), 81–93, und II., ibid. **69** (1910), 372–443.

[2]) *O. Haupt*, Über die Struktur reeller Kurven, Journal f. d. r. u. a. Math. **164** (1931), 50–60.

[3]) *J. Hjelmslev*, Contribution à la géometrie infinitésimale de la courbe réelle, Oversight over det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlungen 1911, 433ff. — Eine erste schwächere Verallgemeinerung des Hjelmslevschen Satzes hatte schon Herr *Rosenthal* in Math. Ann. **73** (1913) erreicht.

Von § 2 des dritten Abschnittes an betrachten wir nur noch stetige Funktionen. Für diese ist die Struktur der Hauptpunktmenge grundsätzlich festgelegt: die Hauptpunkte bilden stets eine F_σ-Menge (eine Vereinigungsmenge abzählbar vieler abgeschlossener Mengen). Damit bilden die Linearpunkte und die Restpunkte zusammen eine G_δ-Menge (einen Durchschnitt abzählbar vieler offener Mengen)[4]. Mit den beiden Bestandteilen der Hauptpunktmenge, der Menge der Konvex- und der Menge der Konkavpunkte, ist die Restpunktmenge dadurch eng verknüpft, daß jeder Restpunkt Häufungspunkt sowohl von Konvex- als auch von Konkavpunkten ist.

Übrigens hätten sich alle Beweise formal vereinfachen lassen, wenn wir uns auf Funktionen ohne lineare Teilstücke beschränkt hätten; wir haben aber der Vollständigkeit halber diese geringe Komplikation in Kauf genommen.

Der Definitionsbereich unserer Funktionen läßt sich nun in zwei Intervallgruppen aufspalten: in solche Intervalle, in denen die Restpunkte nirgends dicht, und solche, in denen sie überall dicht liegen.

In jedem dieser Intervalle zeigt, wie im vierten Abschnitt nachgewiesen wird, die Funktion eine Struktur, die nur von der Gruppenzugehörigkeit des betrachteten Intervalles abhängt. Im einzelnen ergeben sich folgende Verhältnisse:

a) Ist die Restpunktmenge nirgends dicht, so setzt sich die zu der Restpunktmenge komplementäre Menge aus Abschnitten zusammen, die — unabhängig voneinander — nur Linear- oder nur Konvex- oder nur Konkavpunkte enthalten; wir nennen dann die Funktionskurve *linear* bzw. *abschnittweise einwendig*. In jedem dieser Abschnitte ist die Funktion fast überall differenzierbar; in jedem dieser Abschnitte, der nicht aus Linearpunkten besteht, hat die Funktionskurve den Ordnungstypus zwei.

b) Ist die Restpunktmenge überall dicht, so entsteht eine Funktionskurve, die wir *überall doppelwendig* nennen. Die Menge der Linearpunkte ist in diesem Falle leer; für die übrigen drei Mengen bestehen merkwürdig starre Vorschriften: Jede der beiden Mengen, die der Konvex- und die der Konkavpunkte, ist einerseits auch überall dicht, andrerseits von der ersten Kategorie (also *konstruktiv wenig dicht*). Die Restpunkte bilden daher eine Residualmenge.

Zu der Klasse der überall doppelwendigen Funktionen gehören speziell die nirgends differenzierbaren Funktionen.

Der fünfte Abschnitt, der zusammen mit dem sechsten Abschnitt den Teil II dieser Arbeit bildet, erbringt den Nachweis, daß sich alle stetigen Funktionen nach einer und derselben Konstruktionsmethode, die sogar recht einfach ist, erzeugen lassen. Um zu diesem Ziele zu gelangen, werden zunächst einige Approximationssätze bewiesen; das dabei verwendete Approximationsverfahren nennen wir die *natürliche* Approximation der Funktion.

Bei der Konstruktionsmethode ergibt sich außerdem, daß man die F_σ-Menge der Hauptpunkte für die zu konstruierende Funktion beliebig vorgeben kann.

Der sechste Abschnitt behandelt die Einschränkungen, die man der im fünften Abschnitt gebrachten allgemeinen Konstruktionsmethode auferlegen muß, um beliebige nirgends differenzierbare Funktionen zu erhalten. In dieser Hinsicht sind übrigens die von Herrn K. Knopp angegebenen Methoden bemerkenswert, welche sehr viele nirgends differenzierbare Funktionen liefern[5].

---

[4]) Wir können aber mehr beweisen: daß nämlich die Menge der Restpunkte allein eine G_δ-Menge ist.

[5]) *K. Knopp*, Eine einheitliche Erzeugungsart stetiger nirgends differenzierbarer Funktionen, Sitzungsber. d. Berl. Math. Ges. **16** (1917), 97–106 sowie *K. Knopp*, Ein einfaches Verfahren zur Bildung stetiger nirgends differenzierbarer Funktionen, Math. Ztschr. **2** (1918), 1–26.

Von den beiden vorbereitenden Abschnitten bringt der erste die mengentheoretischen Grundlagen, die größtenteils bekannt sind; jedoch erschien es notwendig, noch einiges zu präzisieren sowie einige neue Begriffe einzuführen. Die Voranstellung dieses Abschnittes ergab den Vorteil, daß sich dadurch die Entwicklungen der wesentlichen Abschnitte 3 bis 6 übersichtlicher gestalten ließen.

Denselben Zweck verfolgte die Voranstellung des zweiten Abschnittes über die *Dreiecksdiskriminante*, welche wir als arithmetische Grundlage für die Definition der Konvex-, Konkav-, Linear- und Restpunkte benutzen werden. Der ganze Abschnitt handelt von recht elementaren Dingen; die in ihm aufgestellten Sätze sind als Beweismittel für das folgende zu werten.

Erster Abschnitt.
Die mengentheoretischen Grundlagen.

§ 1. Bezeichnungen und Definitionen.

Obgleich fast alle Begriffe und Sätze dieses Abschnittes sich mühelos auf Punktmengen in mehrdimensionalen Räumen übertragen lassen, beschränken wir uns hier auf lineare Punktmengen, d. h. auf Punktmengen, die sich auf der Zahlengeraden Z_1 befinden.

Nach dem Vorgang von Herrn Denjóy[6]) nennen wir ein abgeschlossenes Intervall $[a, b]$ kürzer ein *Segment*, ein offenes Intervall (a, b) kürzer ein *Intervall*. Die halboffenen Intervalle $(a, b]$ und $[a, b)$ nennen wir *Halbsegmente*.

Es ist praktisch, für die Begriffe Segment, Intervall und Halbsegment einen Sammelbegriff einzuführen. Wir wählen dafür den Ausdruck *Ausschnitt* und die Bezeichnung $\langle a, b\rangle$, die besagen soll, daß einer der vier angegebenen Fälle vorliegt.

Für die Verknüpfung zweier oder mehrerer Mengen verwenden wir die jetzt gebräuchlichen Zeichen $\cup, \cap, \setminus$. Ist A eine Teilmenge von B, so unterscheiden wir die Beziehung $A \leqq B$ (oder $B \geqq A$) von der Beziehung $A < B$ (oder $B > A$). Die letzten beiden besagen, daß A eine echte Teilmenge von B, also die Restmenge $B \setminus A$ nicht leer ist. Ist M eine beliebige Menge, so sei

M' die Menge ihrer Häufungspunkte,
$\bar{M} = M \cup M'$ ihre abgeschlossene Hülle,
$G(M) = \bar{M} \cap \overline{(Z_1 \setminus M)}$ die Menge ihrer Randpunkte.

Ist J ein Intervall auf Z_1, so ist demnach $\bar{J}$ das Segment, dessen Randpunkte mit denen des Intervalles J identisch sind. Es ist also $G(\bar{J}) = G(J)$.

Sind M und N zwei Mengen, so ist

$M \setminus N$ die zu N auf M komplementäre Menge,
$N \setminus M$ die zu M auf N komplementäre Menge.

Ist nun in einem Segment $\bar{J}$ eine Folge $\{A_n\}$ abgeschlossener Mengen gegeben, so nennen wir ihre Vereinigungsmenge $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ eine *F_σ-Menge auf $\bar{J}$*. Ist aber im Intervall J eine Folge $\{E_n\}$ offener Mengen gegeben, so heiße ihr Durchschnitt $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ eine *G_δ-Menge*.

Diese beiden Mengentypen stehen in einer einfachen Beziehung zueinander; wir vermerken den bekannten[7])

[6]) *A. Denjóy*, Mémoire sur les fonctions dérivées ..., Journ. de Math. (7) 1 (1915), 105—240.

[7]) Vgl. etwa: *P. S. Alexandroff*, Einführung in die allgemeine Mengen- und Funktionentheorie (russ.) Moskau 1948, p. 164.

Satz 1. *Ist F eine F_σ-Menge auf $\bar{J}$, so ist $J \setminus F$ eine G_δ-Menge; ist $G \subset J$ eine G_δ-Menge, so ist $\bar{J} \setminus G$ eine F_σ-Menge auf $\bar{J}$.*

Wie ferner bekannt, besteht jede offene Menge $E \subset J$ aus abzählbar vielen[8]) paarweise punktfremden Intervallen, die — abgesehen von ihrer Reihenfolge — eindeutig bestimmt sind[9]). Diese Intervalle nennen wir die *Komponenten* der offenen Menge.

Ist schließlich auf einem Ausschnitt K eine Folge $\{N_n\}$ nirgends dichter Mengen gegeben, so ist ihre Vereinigungsmenge $\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ eine *Menge erster Kategorie* auf K. Jede Menge, die nicht erster Kategorie auf K ist, heißt eine *Menge zweiter Kategorie* auf K[10]).

Es ist zweckmäßig, diesen sehr weitgehenden Begriff der Menge zweiter Kategorie auf K durch Unterbegriffe einzuengen:

Definition 1a. Eine Menge heiße *vollständig zweiter Kategorie auf K*, wenn sie auf jedem Ausschnitt $K_1 \subseteq K$ zweiter Kategorie ist.

Definition 1b. Eine Menge $M \subset K$ heiße eine *Residualmenge auf K*, wenn $K \setminus M$ erster Kategorie auf K ist.

§ 2. Sätze über Mengen erster und zweiter Kategorie.

Aus den Definitionen 1a und 1b ergibt sich unmittelbar

Satz 2. *Ist K ein Ausschnitt, so ist jede Residualmenge auf K gleichzeitig vollständig zweiter Kategorie auf K, und jede Menge, die vollständig zweiter Kategorie auf K ist, ist auch zweiter Kategorie auf K.*

Die beiden folgenden Sätze enthalten notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß eine Menge auf einem Ausschnitt erster bzw. zweiter Kategorie ist; sie sind als Kriterien recht brauchbar.

Satz 3. *Eine Menge M ist auf einem Ausschnitt K dann und nur dann erster Kategorie, wenn in jedem Ausschnitt $K_1 \subseteq K$ ein Teilausschnitt $K_2 \subseteq K_1$ existiert, auf dem M erster Kategorie ist.*

Beweis. 1. Ist M auf K erster Kategorie, so definitionsgemäß auch auf jedem Teilausschnitt $K_1 \subseteq K_2$.

2. Die als hinreichend bezeichnete Bedingung sei erfüllt.

Dann zerlegen wir den Ausschnitt K in 2^n gleiche Teile $K(n, r)$, wobei n eine natürliche Zahl ist, und r die Werte $1, 2, 3, \ldots, 2^n$ durchläuft. In jedem Ausschnitt $K(n, r)$ legen wir (was nach der Voraussetzung möglich ist) einen Teilausschnitt $L(n, r) \subseteq K(n, r)$ fest, auf dem M erster Kategorie ist; der Durchschnitt $M \cap L(n, r)$ ist also erster Kategorie auf K. Bilden wir noch die Summe

$$L = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{r=1}^{2^n} L(n, r),$$

so ist die Menge

$$M \cap L = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{r=1}^{2^n} [M \cap L(n, r)]$$

als Summe abzählbar vieler Mengen erster Kategorie auf K selbst eine Menge erster Kategorie auf K.

[8]) „Abzählbar viel" bedeutet stets, daß die Anzahl entweder Null oder endlich oder abzählbar unendlich ist.

[9]) Vgl. etwa: *E. Kamke*, Neuere Theorie der reellen Funktionen, Leipzig 1929, p. 1031.

[10]) Einige neuere Autoren, wie beispielsweise *P. S. Alexandroff* (a. a. O. [7]), p. 167), verstehen unter einer Menge zweiter Kategorie die Komplementärmenge einer Menge erster Kategorie. Unsere Definition ist die ursprüngliche, von *Baire* gegebene.

Andrerseits ist die Menge $K \setminus L$ nirgends dicht auf K. Ist nämlich $K_1 \leq K$ ein beliebiger Teilausschnitt von K, so existiert stets ein Zahlenpaar (n, r) derart, daß $L(n, r) < K_1$ ist. A fortiori ist damit auch die Menge $M \cap (K \setminus L)$ nirgends dicht auf K, d. h. aber auch erster Kategorie auf K, so daß schließlich die Menge

$$M = (M \cap L) \cup [M \cap (K \setminus L)]$$

als Vereinigung zweier Mengen erster Kategorie auf K selbst erster Kategorie auf K ist.

Satz 4. *Eine Menge M ist auf einem Ausschnitt K dann und nur dann zweiter Kategorie, wenn sie auf mindestens einem Teilausschnitt $K_1 \leq K$ vollständig zweiter Kategorie ist.*

Beweis. 1. Ist M auf $K_1 \leq K$ vollständig zweiter Kategorie, so existiert in K_1 kein Teilausschnitt, auf dem M erster Kategorie wäre. Nach Satz 3 ist daher M auf K nicht erster Kategorie, also definitionsgemäß zweiter Kategorie.

2. Es sei M eine Menge zweiter Kategorie auf K. Wäre dann die Bedingung des Satzes nicht erfüllt, so existierte in jedem Ausschnitt $K_1 \leq K$ ein Teilausschnitt $K_2 \leq K_1$, auf welchem M erster Kategorie wäre. Damit wäre aber M nach Satz 3 erster Kategorie auf K im Widerspruch zur Voraussetzung.

§ 3. Die F_σ- und G_δ-Mengen; kanonische Darstellungen.

Definition 2a. Eine abgeschlossene Menge $A \leq \bar{J}$ heiße *vollkommen abgeschlossen* auf $\bar{J}$, wenn $G(\bar{J}) \leq A$ ist.

Definition 2b. Eine F_σ-Menge $F \leq \bar{J}$ heiße eine *vollkommene F_σ-Menge* auf $\bar{J}$, wenn $G(\bar{J}) \leq F$ ist.

Wir beweisen zunächst den einfachen

Satz 5. *Es sei die Menge $A_0 \leq \bar{J}$ vollkommen abgeschlossen auf $\bar{J}$; ihre offene Komplementärmenge sei $E_0 \leq J$, deren Komponenten wir mit J_s $(s = 1, 2, \ldots)$ bezeichnen. Auf jedem Segment $\bar{J}_s$ sei eine vollkommen abgeschlossene Menge A_s gegeben. Dann ist die Menge*

$$A = A_0 \cup [\bigcup_s A_s] \tag{1}$$

auf $\bar{J}$ vollkommen abgeschlossen.

Beweis. Wegen $G(\bar{J}) \leq A_0 \leq A$ ist die Menge A, wenn sie abgeschlossen ist, auch vollkommen abgeschlossen auf $\bar{J}$. Wir haben daher nur noch ihre Abgeschlossenheit auf $\bar{J}$ zu beweisen.

Es sei $E = \bar{J} \setminus A$ die zu A komplementäre Menge. Aus $A_0 \leq A$ und $E_0 = \bigcup_s J_s$ folgt

$$E \leq E_0 = \bigcup_s J_s \tag{2}$$

und hieraus

$$E = \bigcup_s (E \cap J_s). \tag{3}$$

Nun ist aber $E \cap J_s = \bar{J}_s \setminus A_s$ eine offene Menge, da A_s auf $\bar{J}_s$ vollkommen abgeschlossen ist.

Hieraus und aus (3) ergibt sich, daß E offen, ihre Komplementärmenge A also auf $\bar{J}$ abgeschlossen ist.

Diesen Satz benutzen wir im Beweis von

Satz 6. *Eine Menge $F \leq \bar{J}$ ist dann und nur dann eine vollkommene F_σ-Menge auf $\bar{J}$, wenn sie eine Darstellung von der Form*

$$F = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n \tag{4}$$

zuläßt, wobei

(5a) $$F_0 = G(\bar{J}),$$

(5b) *jede der Mengen F_n auf $\bar{J}$ vollkommen abgeschlossen,*

(5c) $$F_n \leqq F_{n+1}$$

ist, und außerdem folgende Forderung erfüllt ist:

(6) *Ist E_n die offene Komplementärmenge von F_n, und ist $J_{n,s}$ eine beliebige Komponente von E_n, so sei $J_{n,s} \cap F_{n+1}$ dann und nur dann leer, wenn $J_{n,s} \cap F$ leer ist.*

Beweis. 1. Es existiere für F eine Darstellung von der Form (4), welche den Bedingungen (5a) bis (5c) genügt. Aus (5b) und (4) folgt, daß F eine F_σ-Menge auf $\bar{J}$ ist, aus (5a), daß diese F_σ-Menge auf $\bar{J}$ vollkommen ist.

2. Es sei $F \leqq \bar{J}$ eine vollkommene F_σ-Menge auf $\bar{J}$. Dann existiert definitionsgemäß eine abzählbare Folge auf $\bar{J}$ abgeschlossener Mengen $\{A_m\}$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$, für welche

(7) $$F = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$$

ist. Setzen wir noch $A_0 = G(\bar{J})$, so ist auch A_0 abgeschlossen, und wegen $G(\bar{J}) \leqq F$ folgt aus (7) auch

(7a) $$F = \bigcup_{m=0}^{\infty} A_m.$$

Setzen wir jetzt

(8) $$S_m = \bigcup_{r=0}^{m} A_r; \quad S_0 = A_0 = G(\bar{J}),$$

so ist jede der Mengen S_m $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ auf $\bar{J}$ vollkommen abgeschlossen, und es ist

(9) $$S_m \leqq S_{m+1},$$

und gemäß (8) und (7a)

(10) $$\bigcup_{m=0}^{\infty} S_m = \bigcup_{m=0}^{\infty} A_m = F.$$

Die Darstellung

(10a) $$F = \bigcup_{m=0}^{\infty} S_m$$

von F genügt (mit S_m anstatt F_n) auf Grund von (8), (9) und der vollkommenen Abgeschlossenheit jedes Summanden S_m schon den Forderungen (5a) bis (5c). Wir leiten aus ihr nun eine Darstellung (4) ab, die außerdem noch der Forderung (6) genügt.

Als erstes setzen wir

(11) $$F_0 = S_0 = G(\bar{J}).$$

Zur Definition von F_1 bemerken wir, daß die offene Menge $E_0 = \bar{J} \setminus F_0$ mit dem Intervall J identisch ist.

Ist $J \cap F$ leer, so setzen wir $J \cap F_n$ leer an für jeden Index $n \geqq 1$, und die Konstruktion ist beendet.

Ist aber $J \cap F$ nicht leer, so gibt es in der Darstellung (10a) einen Index

(12) $$m = m_0 \geqq 1,$$

für welchen $J \cap S_{m_0 - 1}$ leer, aber $J \cap S_{m_0}$ nicht mehr leer ist. Wir setzen dann

(13) $$F_1 = F_0 \cup S_{m_0} = S_{m_0}.$$

Offensichtlich ist F_1 vollkommen abgeschlossen auf $\bar{J}$, da S_{m_0} diese Eigenschaft besitzt, ferner ist $F_0 < F_1$, und schließlich ist der Bedingung (6) für $n = 0$ Genüge getan.

Nunmehr definieren wir S_2. Die Komponenten der offenen Menge $E_1 = \bar{J} \setminus F_1$ seien $J_{1,s}$ $(s = 1, 2, \ldots)$. Ist für einen bestimmten Index s der Durchschnitt $J_{1,s} \cap F$ leer, so setzen wir $J_{1,s} \cap F_n$ leer an für alle Indizes $n \geqq 2$.

Ist $J_{1,s} \cap F$ nicht leer, so existiert in der Darstellung (10) ein Index

$$m = m_{1,s} > m_0, \tag{14}$$

wegen (12) also

$$m_{1,s} \geqq 2, \tag{14a}$$

für welchen $J_{1,s} \cap S_{m_{1,s}-1}$ leer, aber $J_{1,s} \cap S_{m_{1,s}}$ nicht leer ist. Wir setzen dann

$$J_{1,s} \cap F_2 = J_{1,s} \cap S_{m_{1,s}}. \tag{15}$$

Damit ist F_2 auf jeder Komponente von E_1 definiert und läßt sich in der Form

$$F_2 = F_1 \cup \left[\bigcup_s (\bar{J}_{1,s} \cap S_{m_{1,s}})\right] \tag{16}$$

schreiben.

Auf F_2 trifft Satz 5 zu (mit F_1 anstatt A_0 und $\bar{J}_{1,s} \cap S_{m_{1,s}}$ anstatt A_2); es ist also F_2 vollkommen abgeschlossen auf $\bar{J}$. Außerdem ist $F_1 \leq F_2$, und die Bedingung (6) auf Grund der Konstruktion von F_2 erfüllt.

Das Verfahren läßt sich fortsetzen. Wir nehmen an, wir haben alle Summanden F_r $(r = 0, 1, 2, \ldots, n)$ konstruiert, und für $1 \leqq r \leqq n$ habe jeder die Form

$$F_r = F_{r-1} \cup \left[\bigcup_s (\bar{J}_{r-1,s} \cap S_{m_{r-1,s}})\right], \tag{17}$$

wobei $J_{r-1,s}$ die Komponenten von $E_{r-1} = \bar{J} \setminus S_{r-1}$ seien, und

$$m_{r-1,s} \geqq r \tag{18}$$

sei. Sind dann $J_{n,s}$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$ die Komponenten von $E_n = \bar{J} \setminus S_n$, und ist für einen bestimmten Index s der Durchschnitt $J_{n,s} \cap F$ leer, so setzen wir $J_{n,s} \cap F_{n+k}$ leer für jeden Wert $k \geqq 1$.

Ist aber $J_{n,s} \cap F$ nicht leer, so liefert die Darstellung (10) einen Index

$$m = m_{n,s} \geqq n + 1, \tag{19}$$

für den $J_{n,s} \cap S_{m_{n,s}-1}$ leer, aber $J_{n,s} \cap S_{m_{n,s}}$ nicht leer ist; die Abschätzung (19) ergibt sich dabei aus (18) und aus der Tatsache, daß $J_{n,s} \cap S_n$ leer ist. Die Menge

$$F_{n+1} = F_n \cup \left[\bigcup_s (J_{n,s} \cap S_{m_{n,s}})\right] \tag{20}$$

hat dann wieder alle verlangten Eigenschaften.

Wir haben nun nur noch zu beweisen, daß für die so konstruierten Summanden F_n die Beziehung (4) erfüllt ist.

Auf Grund von (17), (18) und (9) ist $F_n \geq S_n$, woraus wir mit Hilfe von (10) erhalten

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n \geqq \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n = F. \tag{21}$$

Andrerseits ist wegen (17) auch $F_n \leqq \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n = F$, also

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n \leqq F. \tag{22}$$

Aus (21) und (22) folgt aber (4). Damit ist Satz 6 vollständig bewiesen.

Das duale Gegenstück zu diesem Satz ist

Satz 7. *Eine Menge $E \leq J$ ist dann und nur dann eine G_δ-Menge auf J, wenn sie eine Darstellung von der Form*

$$E = \bigcap_{n=0}^{\infty} E_n \tag{23}$$

zuläßt, wobei

$$E_0 = J, \tag{24a}$$

(24b) *jede der Mengen E_n offen,*

$$E_n \geqq E_{n+1} \tag{24c}$$

ist und

(25) *eine Komponente $J_{n,s}$ von E_n dann und nur dann auch Komponente von E_{n+1} ist, wenn $J_{n,s} \leqq E$ ist.*

Der Beweis folgt unmittelbar aus dem vorhergehenden Satz, den man auf die komplementäre Menge $F = \bar{J} \setminus E$ anwendet, worauf man $E_n = \bar{J} \setminus F_n$ setzt.

Definition 3a. Eine Summendarstellung von der Form (4), welche den Bedingungen (5a) bis (6) genügt, heiße eine *kanonische Summendarstellung* auf $\bar{J}$.

Definition 3b. Eine Durchschnittdarstellung von der Form (23), welche den Bedingungen (23) bis (25) genügt, heiße eine *kanonische Durchschnittdarstellung* auf J.

Mit diesen Bezeichnungen können wir die Sätze 6 und 7 kürzer formulieren:

Satz 6a. *Eine Menge $F \leqq \bar{J}$ ist dann und nur dann eine vollkommene F_σ-Menge auf $\bar{J}$, wenn sie eine kanonische Summendarstellung auf $\bar{J}$ zuläßt.*

Satz 7a. *Eine Menge $E \leqq J$ ist dann und nur dann eine G_δ-Menge auf J, wenn sie eine kanonische Durchschnittdarstellung auf J zuläßt.*

Der Beweis, daß eine Menge $F \leqq \bar{J}$ eine vollkommene F_σ-Menge in $\bar{J}$ ist, läßt sich nach den Sätzen 1, 6a und 7a auf zwei Arten führen: entweder direkt, indem man für F eine kanonische Summendarstellung auf $\bar{J}$ nachweist, oder indirekt, indem man für die Komplementärmenge $\bar{J} \setminus F$ eine kanonische Durchschnittdarstellung auf J nachweist.

Ebenso gibt es für den Beweis, daß eine Menge $E \leqq J$ eine G_δ-Menge ist, zwei Möglichkeiten: entweder den Nachweis, daß E eine kanonische Durchschnittdarstellung auf J, oder den Nachweis, daß $\bar{J} \setminus E$ eine kanonische Summendarstellung auf $\bar{J}$ zuläßt.

Eine F_σ-Menge kann erster oder zweiter Kategorie auf $\bar{J}$ sein. Beide Möglichkeiten unterscheiden sich scharf durch die Struktur der Summanden der kanonischen Summendarstellung. Davon handelt

Satz 8. *Ist $F \leqq \bar{J}$ eine vollständige F_σ-Menge auf $\bar{J}$, und ist $F = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$ eine kanonische Summendarstellung von F, so ist F*

a) *dann und nur dann erster Kategorie auf $\bar{J}$, wenn jeder kanonische Summand F_n nirgends dicht auf $\bar{J}$ ist,*

b) *dann und nur dann zweiter Kategorie auf $\bar{J}$, wenn es einen Index $N \geqq 1$ und ein Segment $\bar{J}_N \leqq \bar{J}$ gibt von der Beschaffenheit, daß für $n \geqq N$ stets $\bar{J}_N \leqq F_n$, für $n < N$ aber $\bar{J}_N \cap F_n$ leer ist.*

Beweis. Zu a). 1. Ist jeder Summand F_n nirgends dicht auf $\bar{J}$, so ist die Summe F definitionsgemäß erster Kategorie auf $\bar{J}$.

2. Es sei F erster Kategorie auf $\bar{J}$. Wäre nun ein Summand F_n dicht auf einem Segment $\bar{J}_1 \leq \bar{J}$, so würde aus der Abgeschlossenheit von F_n sich $\bar{J}_1 \leq F_n \leq F$ ergeben; damit wäre F zweiter Kategorie auf $\bar{J}$ im Widerspruch zu der Voraussetzung.

Zu b). 1. Aus $\bar{J}_N \leqq F_{n \geqq N}$ folgt $\bar{J}_N \leqq F$; damit ist F zweiter Kategorie auf $\bar{J}$.

2. Es sei F zweiter Kategorie auf $\bar{J}$; dann existiert ein Index $N \geqq 1$ derart, daß die Summanden $F_{n \geqq N}$ auf $\bar{J}$ zweiter Kategorie, die Summanden $F_{n<N}$ auf $\bar{J}$ erster Kategorie sind. Nach Satz 4 existiert daher ein Segment $\bar{J}_1 < \bar{J}$, auf dem F_N vollständig zweiter Kategorie, und damit auf $\bar{J}_1$ überall dicht ist. Wegen der Abgeschlossenheit von $\bar{J}_1$ ist also $\bar{J}_1 \leq F_N$, und damit wegen (5c) auch $\bar{J}_1 \leqq F_{n \geqq N}$.

Andrerseits ist $F_{n<N}$ erster Kategorie und abgeschlossen auf $\bar{J}$, also nirgends dicht auf $\bar{J}$. Es existiert daher ein Segment $\bar{J}_N < \bar{J}_1$, für welches der Durchschnitt $\bar{J}_N \cap F_{N-1}$ leer, und damit wegen (5c) alle Durchschnitte $\bar{J}_N \cap F_{n<N}$ leer sind. Mit der Bemerkung, daß außerdem $\bar{J}_N \leqq \bar{J}_1 \leqq F_{n \geqq N}$ ist, ist der Satz bewiesen.

Satz 9. *Ist eine G_δ-Menge E auf J überall dicht, so ist sie eine Residualmenge auf J.*

Beweis. Die F_σ-Menge $\bar{J} \setminus E$ enthält nach der über E gemachten Voraussetzung kein Teilsegment von $\bar{J}$; sie ist also nach Satz 8 erster Kategorie auf $\bar{J}$. Damit ist aber E selbst nach Definition 1b eine Residualmenge auf $\bar{J}$.

§ 4. Intervallschachtelungen.

Der Begriff der kanonischen Durchschnittdarstellung einer G_δ-Menge hängt mit dem Begriff der sog. Intervallschachtelung eng zusammen.

Definition 4. Eine aus abzählbar unendlich vielen Intervallen bestehende Intervallfolge $\{J_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, welche der Bedingung

$$J_n \geqq J_{n-1} \tag{26}$$

genügt, heißt eine *Intervallschachtelung* oder kurz eine *Schachtelung*.

Im wesentlichen interessiert der Durchschnitt

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} J_n, \tag{27}$$

den wir den *Durchschnitt der Schachtelung* nennen.

Es gibt nur drei Typen von Schachtelungsdurchschnitten. Entweder ist er leer oder er besteht aus genau einem Punkt oder er besteht aus einem Ausschnitt. Entsprechend bezeichnen wir die Schachtelung selbst als eine *leere Schachtelung* bzw. eine *Punktschachtelung* bzw. eine *Ausschnittschachtelung*.

Haben wir nun eine G_δ-Menge $E < J$ und eine kanonische Durchschnittdarstellung (23) von E, so bezeichnen wir die Komponenten von E_n mit $J(n, s)$ $(s = 1, 2, \ldots)$.

Ist $x_k \in E$, so liegt x_k bei festem Index n in genau einer Komponente von E_n, die wir mit $J[n, s(n, x_k)]$ bezeichnen. Aus (24) folgt

$$J[n, s(n, x_k)] \geqq J[n+1, s(n+1, x_k)]. \tag{28}$$

Die Schachtelung $\{J[n, s(n, x_k)]\}$ ist durch x_k eindeutig bestimmt; wir nennen sie daher *die x_k enthaltende Schachtelung aus $\{E_n\}$*. Diese letztere Schachtelung ist offensichtlich nicht leer, da ihr Durchschnitt ja den Punkt x_k enthält. Sie enthält also entweder nur den Punkt x_k oder einen Ausschnitt K, wobei $x_k \in K$ ist. Im letzteren Falle ist die Schachtelung für jeden Punkt $x \in K$ identisch mit der x_k enthaltenden Schachtelung.

Zweiter Abschnitt.

Die Dreiecksdiskriminante.

§ 1. Grundbegriffe und Bezeichnungen.

Wir betrachten in diesem Abschnitt Funktionen $f(x)$ einer Veränderlichen x, die in einem Segment $\bar{J} = [a,b]$ definiert sind. Die einzige Bedingung, die wir ihnen dabei auferlegen, ist, daß sie nur endliche Werte annehmen (sie brauchen also nicht einmal beschränkt zu sein). Die Punkte in $\bar{J}$ bezeichnen wir mit x, x_0, x_1, x_j, x_k usw.

Es ist bequem, für die Übereinstimmung bzw. die Nichtübereinstimmung zweier Zahlen im Vorzeichen einen kurzen Ausdruck und eine symbolische Schreibweise einzuführen.

Definition 5. Zwei oder mehr von Null verschiedene Zahlen, die im Vorzeichen übereinstimmen, heißen *äquisigniert*, zwei Zahlen mit entgegengesetztem Vorzeichen *kontrasigniert*. Symbolische Schreibweise:

(29a) $\alpha \frown \beta$ für Äquisignierung von α und β.

(29b) $\alpha \frown\!\!\!\!\!+\ \beta$ für Kontrasignierung von α und β.

Die Rechenregeln für dieses Symbol sind einfach. Wir führen für spätere Zwecke an:

(30a) Aus $\alpha \frown \beta$ und $\beta \frown \gamma$ folgt $\alpha \frown \gamma$

(30b) Aus $\alpha \frown\!\!\!\!\!+\ \beta$ und $\beta \frown\!\!\!\!\!+\ \gamma$ folgt $\alpha \frown \gamma$

(30c) Aus $\alpha \frown \beta$ und $\beta \frown\!\!\!\!\!+\ \gamma$ folgt $\alpha \frown\!\!\!\!\!+\ \gamma$

(30d) Aus $\alpha \frown \beta$, $\gamma > 0$, $\delta > 0$ folgt:

$$\alpha \frown \beta \frown \alpha\gamma \frown \beta\delta \frown \alpha\gamma + \beta\delta.$$

§ 2. Differenzenquotient; lineare Interpolationsfunktion.

Es sei $f(x)$ in $\bar{J}$ definiert, und es sei $x_j \neq x_k$. Dann führen wir für den Differenzenquotienten die abkürzende Schreibweise $q(f;\, x_j, x_k)$ ein. Es ist also

$$(31) \qquad q(f;\, x_j, x_k) = \frac{f(x_k) - f(x_j)}{x_k - x_j} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ f(x_j) & f(x_k) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_j & x_k \end{vmatrix}}.$$

Offensichtlich ist

$$(31\text{a}) \qquad q(f;\, x_j, x_k) = q(f;\, x_k, x_j);$$

der Differenzenquotient ist somit eine Permutationsinvariante. Aus seinem Vorzeichen erfahren wir, ohne Kenntnis der Anordnung von x_j und x_k, ob der Funktionswert im links oder im rechts gelegenen Endpunkt des von x_j und x_k begrenzten Segmentes größer ist. Er verschwindet, wenn beide Funktionswerte gleich sind.

Die lineare Interpolationsfunktion für $f(x)$ von x_j bis x_k bezeichnen wir mit $L(f;\, x_j, x_k;\, x)$. Ihre Definitionsgleichung ist implizit

$$(32) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_j & x_k & x \\ f(x_j) & f(x_k) & L(f;\, x_j, x_k;\, x) \end{vmatrix} = 0$$

oder explizit

$$(32\text{a}) \qquad \begin{aligned} L(f;\, x_j, x_k;\, x) &= f(x_j) + (x - x_j)\, q(f;\, x_j, x_k) \\ &= f(x_k) + (x - x_k)\, q(f;\, x_j, x_k), \end{aligned}$$

und speziell ist

$$L(f;\, x_j, x_k;\, x_j) = f(x_j), \tag{32b}$$

$$L(f;\, x_j, x_k;\, x_k) = f(x_k). \tag{32c}$$

Die Abweichung der linearen Interpolation von der Funktion $f(x)$ bezeichnen wir mit $D(f;\, x_j, x_k;\, x)$; es ist also

$$D(f;\, x_j, x_k;\, x) = L(f;\, x_j, x_k;\, x) - f(x), \tag{33}$$

und nach (32b) und (32c) speziell

$$D(f;\, x_j, x_k;\, x_j) = D(f;\, x_j, x_k;\, x_k) = 0. \tag{33a}$$

Aus (32) und (33) gewinnt man leicht

$$D(f;\, x_j, x_k;\, x) = \frac{1}{x_j - x_k} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_j & x_k & x \\ f(x_j) & f(x_k) & f(x) \end{vmatrix}. \tag{33b}$$

Wir bemerken noch, daß die Funktionen L und D im ganzen Definitionsbereich von $f(x)$ definiert sind, also auch außerhalb des Interpolationssegmentes $[x_j, x_k]$.

Ist $x_i < x_j < x_k$, so bezeichnen wir gelegentlich die lineare Interpolationsfunktion $L(f;\, x_i, x_k;\, x_j)$ als eine *lineare Überbrückung* des Punktes x_j.

§ 3. Die Dreiecksdiskriminante.

Unter einem *Punkttripel* aus J verstehen wir drei paarweise verschiedene Punkte x_i, x_j, x_k aus J. Der kleinste dieser drei Werte heiße der *linke*, der größte der *rechte Außenpunkt* des Tripels, der übriggebliebene der *Innenpunkt* des Tripels.

Stellen wir die Funktion $f(x)$ in rechtwinkligen ebenen Koordinaten dar, indem wir die Funktionswerte als Ordinaten y verwenden und setzen wir $y_i = f(x_i)$, $y_j = f(x_j)$, $y_k = f(x_k)$, so bilden die drei Punkte (x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_k, y_k) ein Dreieck, das wir das *Funktionsdreieck* von $f(x)$ für das Tripel nennen.

Das Funktionsdreieck heiße *konvex*, wenn der Funktionswert des Innenpunktes *unterhalb* der linearen Interpolationsfunktion zwischen den beiden Außenpunkten, es heiße *konkav*, wenn er *oberhalb* dieser Interpolationsfunktion liegt. Liegt er *auf* der Interpolationsfunktion, so ist das Funktionsdreieck degeneriert; wir bezeichnen es in diesem Falle als *lineares* Funktionsdreieck.

Kennt man die Anordnung der drei Punkte, so läßt sich die Entscheidung über den Charakter des Funktionsdreiecks leicht mit Hilfe der Funktion (33) treffen.

Satz 10. *Ist $x_i < x_j < x_k$, so ist das Funktionsdreieck von $f(x)$ für dieses Tripel*

konvex, wenn $D(f;\, x_i, x_k;\, x_j) > 0$,

konkav, wenn $D(f;\, x_i, x_k;\, x_j) < 0$,

linear, wenn $D(f;\, x_i, x_k;\, x_j) = 0$

ist.

Dieses Kriterium ist von der Anordnung der drei Punkte abhängig. Wir suchen nun (in Analogie zum Differenzenquotienten) eine Permutationsinvariante, die es uns ermöglicht, die Entscheidung ohne Kenntnis der Anordnung des Tripels zu fällen.

Wir setzen

$$\Delta(f;\, x_i, x_j, x_k) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_i & x_j & x_k \\ f(x_i) & f(x_j) & f(x_k) \end{vmatrix}, \tag{34}$$

also speziell

$$\Delta(x^2;\, x_i,\, x_j,\, x_k) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_i & x_j & x_k \\ x_i^2 & x_j^2 & x_k^2 \end{vmatrix}; \tag{34a}$$

dann ist der Quotient

$$Q(f;\, x_i,\, x_j,\, x_k) = \frac{\Delta(f;\, x_i,\, x_j,\, x_k)}{\Delta(x^2;\, x_i,\, x_j,\, x_k)} \tag{35}$$

eine Permutationsvariante von der gewünschten Eigenschaft.

Die Permutationsinvarianz des Ausdruckes (35) ist offensichtlich, da Zähler und Nenner bei beliebiger Permutation der drei Indizes i, j, k ihre Absolutwerte beibehalten und entweder beide ihre Vorzeichen beibehalten oder beide ihr Vorzeichen wechseln.

Definition 6. Ist x_i, x_j, x_k ein beliebig angeordnetes Punkttripel, so nennen wir den Ausdruck $Q(f;\, x_i,\, x_j,\, x_k)$ die *Dreiecksdiskriminante* der Funktion $f(x)$ für dieses Tripel.

Um zu beweisen, daß die Dreiecksdiskriminante die geforderte Eigenschaft hat, entwickeln wir (34a) und erhalten

$$\Delta(x^2;\, x_i,\, x_j,\, x_k) = (x_i - x_j)\,(x_j - x_k)\,(x_k - x_i). \tag{36}$$

Aus (33b) und (34) folgt

$$D(f;\, x_i,\, x_k;\, x_j) = \frac{1}{x_i - x_k}\,\Delta(f;\, x_i,\, x_k,\, x_j) = \frac{1}{x_k - x_i}\,\Delta(f;\, x_i,\, x_j,\, x_k), \tag{37}$$

und nun aus (35) bis (37)

$$D(f;\, x_i,\, x_k;\, x_j) = (x_i - x_j)\,(x_j - x_k)\,Q(f;\, x_i,\, x_j,\, x_k). \tag{38}$$

Aus (38) folgt zunächst

Satz 11. *Es ist*

$$D(f;\, x_i,\, x_k;\, x_j) \frown Q(f;\, x_i,\, x_j,\, x_k)$$

dann und nur dann, wenn x_j der Innenpunkt des Tripels x_i, x_j, x_k ist.

Und nun folgt leicht

Satz 12. *Das Funktionsdreieck einer Funktion für ein Punkttripel ist konvex, konkav, linear, je nachdem die Dreiecksdiskriminante der Funktion für dieses Tripel positiv, negativ oder Null ist.*

Der Beweis ergibt sich aus den Sätzen 10 und 11 sowie aus der Permutationsinvarianz der Dreiecksdiskriminante.

Mit den Sätzen 10 und 12 haben wir zwei Kriterien für den Typus des Funktionsdreiecks. Wir stellen noch ein drittes Kriterium auf. Wir setzen

$$u(f;\, x_i,\, x_k;\, x_j) = q(f;\, x_j,\, x_k) - q(f;\, x_i,\, x_j), \tag{39}$$

woraus

$$u(f;\, x_k,\, x_i;\, x_j) = -\,u(f;\, x_i,\, x_k;\, x_j) \tag{40}$$

folgt. Durch Permutation der Indizes erhalten wir für jedes Punkttripel sechs verschiedene Ausdrücke (39), die nach (40) paarweise zusammengehören. Eine einfache Umformung von (39) mit Hilfe von (31) und (34) bis (35) ergibt

$$u(f;\, x_i,\, x_k;\, x_j) = (x_k - x_i)\,Q(f;\, x_i,\, x_j,\, x_k). \tag{41}$$

Aus dieser Identität folgt zunächst

Satz 13. *Ist $x_i < x_j < x_k$, so bestehen die Äquisignierungen*

$$u(f;\, x_i,\, x_j;\, x_k) \frown u(f;\, x_i,\, x_k;\, x_j) \frown u(f;\, x_j,\, x_k;\, x_i) \frown Q(f;\, x_i,\, x_j,\, x_k).$$

Aus diesem Satz und Satz 12 ergibt sich

Satz 14. *Das Funktionsdreieck einer Funktion $f(x)$ für ein Punkttripel $x_i < x_j < x_k$ ist konvex, konkav, linear, je nachdem einer der drei in Satz 13 genannten u-Werte positiv, negativ oder Null ist.*

Aus (38) und (41) erhalten wir noch

Satz 15. *Es sei x_1, x_2, x_3 ein Punkttripel, und x_i, x_j, x_k eine beliebige Permutation dieses Tripels. Verschwindet dann einer der Ausdrücke $Q(f; x_i, x_j, x_k)$, $D(f; x_i, x_k; x_j)$, $u(f; x_i, x_k; x_j)$, so verschwinden alle drei, und zwar auch für jede andere Permutation des Tripels.*

Schließlich ergeben die Definitionsgleichungen (31), (32a), (33), (35), (39) unmittelbar den

Satz 16. *Ist $F(x)$ eine Linearkombination von n Funktionen f_r $(r = 1, 2, \ldots, n)$, also*

$$F(x) = \sum_{r=1}^{n} c_r f_r(x),$$

wobei die c_r Konstanten sind, so ist

$$q(F; x_i, x_j) = \sum_{r=1}^{n} c_r\, q(f_r; x_i, x_j) \tag{42a}$$

$$L(F; x_i, x_k; x_j) = \sum_{r=1}^{n} c_r\, L(f_r; x_i, x_k; x_j) \tag{42b}$$

$$D(F; x_i, x_k; x_j) = \sum_{r=1}^{n} c_r\, D(f_r; x_i, x_k; x_j) \tag{42c}$$

$$Q(F; x_i, x_j, x_k) = \sum_{r=1}^{n} c_r\, Q(f_r; x_i, x_j, x_k) \tag{42d}$$

$$u(F; x_i, x_j; x_k) = \sum_{r=1}^{n} c_r\, u(f_r; x_i, x_j; x_k). \tag{42e}$$

Für eine lineare Funktion f_r ist insbesondere $Q = 0$.

Hieraus, aus (42d) und Satz 12 ergibt sich

Satz 17. *Ist die Differenz zweier Funktionen f_1 und f_2 eine lineare Funktion und ist x_i, x_j, x_k ein beliebiges Tripel, so gehören die Funktionsdreiecke beider Funktionen für dieses Tripel zu demselben Typus.*

§ 4. Gruppen von mehr als drei Punkten.

Es seien n paarweise verschiedene Punkte gegeben, wobei $n \geqq 4$ sei; die Anordnung dieser Punkte auf der Zahlengeraden sei vorläufig beliebig. Aus diesem n-tupel lassen sich $\binom{n}{3}$ verschiedene Tripel entnehmen, deren jedes eine Dreiecksdiskriminante besitzt. Wir weisen nach, daß diese $\binom{n}{3}$ Diskriminanten eine aus $n-2$ Diskriminanten bestehende Basis haben, in dem Sinne, daß jede der $\binom{n}{3}$ Diskriminanten sich linear durch die zur Basis gehörigen Diskriminanten ausdrücken läßt.

Wir verwenden in diesem Paragraphen eine abkürzende Schreibweise: an Stelle von $Q(f; x_i, x_j, x_k)$ schreiben wir kürzer: $Q(i, j, k)$ usw.

Wir leiten zuerst eine Identität ab. Es sei t ein fester Wert aus der Reihe $t = 2, 3, \ldots, n-1$. Aus (39) und (41) erhält man

$$(43)\quad (x_n - x_t)\,Q(1, t, n) = u(f; x_t, x_n; x_1) = q(f; x_t, x_n) - q(f; x_1, x_t)$$
$$= \sum_{s=t}^{n-1} [q(f; x_1, x_{s+1}) - q(f; x_1, x_s)]$$
$$= \sum_{s=t}^{n-1} u(f; x_s, x_{s+1}; x_1) = \sum_{s=t}^{n-1} (x_{s+1} - x_s)\,Q(1, s, s+1).$$

Nunmehr drücken wir jede Diskriminante von der Form $Q(1, s, s+1)$ linear durch die $n-2$ Diskriminanten von der Form $Q(r-1, r, r+1)$ aus. Wir erreichen dies durch ein Rekursionsverfahren. Für $s = 2$ ist

$$(44)\qquad Q(1, s, s+1) = Q(1, 2, 3) = Q(r-1, r, r+1) \text{ mit } r = 2.$$

Aus (39) und (41) erhalten wir die Rekursionsformel

$$(45)\qquad (x_{s+1} - x_1)\,Q(1, s, s+1) = u(f; x_1, x_{s+1}; x_s)$$
$$= u(f; 1, s-1; s) + u(f; s-1, s+1; s)$$
$$= (x_{s-1} - x_1)\,Q(1, s-1, s) + (x_{s+1} - x_{s-1})\,Q(s-1, s, s+1).$$

Hieraus und aus (44) ergibt sich durch einen Induktionsschluß

$$(46)\quad (x_s - x_1)(x_{s+1} - x_1)\,Q(1, s, s+1) = \sum_{r=2}^{s} (x_r - x_1)(x_{r+1} - x_{r-1})\,Q(r-1, r, r+1),$$

womit unser erstes Ziel erreicht ist.

Satz 18. *Sind n paarweise verschiedene Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gegeben, so bilden die $n-2$ Dreiecksdiskriminanten von der Form $Q(r-1, r, r+1)$ mit $r = 2, 3, \ldots, n-1$ eine Basis B im oben angegebenen Sinne.*

Beweis. Jede Dreiecksdiskriminante von der Form $Q(1, t, n)$ ist nach (43) durch die Diskriminanten von der Form $Q(1, s, s+1)$ linear darstellbar, die letzteren aber nach (46) durch die in B enthaltenen Diskriminanten. Ist aber (x_i, x_t, x_k) ein beliebiges Tripel aus dem gegebenen n-tupel, und ist $x_i < x_t < x_k$, so läßt sich $Q(i, t, k)$ nach der soeben angegebenen Methode schon durch die $k-i-1$ Diskriminanten $Q(r-1, r, r+1)$, $r = i+1, i+2, \ldots, k-1$ darstellen. Damit ist der Satz bewiesen.

Verwendet man die Beziehungen (46) in (43), so erhält man die Identität

$$(47)\quad (x_n - x_1)\,Q(1, t, n) = \frac{1}{x_t - x_1} \sum_{r=2}^{t} (x_r - x_1)(x_{r+1} - x_{r-1})\,Q(r-1, r, r+1)$$
$$+ \frac{1}{x_n - x_t} \sum_{r=t+1}^{n-1} (x_n - x_r)(x_{r+1} - x_{r-1})\,Q(r-1, r, r+1).$$

Nun nehmen wir eine bestimmte Anordnung der Punkte des n-tupels an:

Satz 19. *Es sei ein geordnetes n-tupel $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ gegeben. Unter den $n-2$ Dreiecksdiskriminanten der Basis B befinde sich mindestens eine von Null verschiedene; alle von Null verschiedenen Diskriminanten aus B seien äquisigniert. Dann sind alle Diskriminanten $Q(1, t, n)$ von Null verschieden und mit den von Null verschiedenen Diskriminanten aus B äquisigniert.*

Der Beweis folgt aus (47) und (30d), weil alle Koeffizienten der Diskriminanten in (47) auf Grund der vorausgesetzten Anordnung des n-tupels positiv sind.

In einem Punktquadrupel bildet jedes Paar von Diskriminanten eine Basis. Beachtet man dies, so erhält man leicht den (geometrisch fast trivialen)

Satz 19a. *Es sei $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, und es sei eine und nur eine der vier möglichen Dreiecksdiskriminanten gleich Null. Dann gelten folgende vier Aussagen:*

I. *Aus* $Q(1, 2, 3) = 0$ *folgt* $Q(1, 2, 4) \frown Q(1, 3, 4) \frown Q(2, 3, 4)$.

II. *Aus* $Q(2, 3, 4) = 0$ *folgt* $Q(1, 2, 3) \frown Q(1, 2, 4) \frown Q(1, 3, 4)$.

III. *Aus* $Q(1, 2, 4) = 0$ *folgt* $Q(1, 3, 4) \frown Q(2, 3, 4) \not\frown Q(1, 2, 3)$.

IV. *Aus* $Q(1, 3, 4) = 0$ *folgt* $Q(1, 2, 3) \frown Q(1, 2, 4) \not\frown Q(2, 3, 4)$.

Dritter Abschnitt.

Linear-, Konvex-, Konkav- und Restpunkte.

§ 1. Die Definitionen.

In diesem Paragraphen verstehen wir unter $f(x)$ noch wie im vorhergehenden Abschnitt eine in $\bar{J}$ endliche Funktion. Erst vom nächsten Paragraphen an legen wir ihr die schärfere Bedingung der Stetigkeit auf.

Definition 7. *Es sei $J_1 \leqq J$. Dann heiße ein Punkt $x_j \in J_1$ ein Linear- bzw. ein Konvex- bzw. ein Konkavpunkt der Funktion $f(x)$ in J_1, wenn in einer gewissen Umgebung $U < J_1$ von x_j für jedes Punktepaar x_i, x_k, welches den Bedingungen*

$$x_i \in U; \quad x_k \in U, \tag{48a}$$

$$x_i < x_j < x_k \tag{48b}$$

genügt, die Beziehung

$$Q(f; x_i, x_j, x_k) = 0 \tag{49a}$$

bzw.

$$Q(f; x_i, x_j, x_k) > 0 \tag{49b}$$

bzw.

$$Q(f; x_i, x_j, x_k) < 0 \tag{49c}$$

besteht.

Definition 8. Jeder Punkt in $J_1 \leqq J$, der weder Linear- noch Konvex- noch Konkavpunkt von $f(x)$ in J_1 ist, heiße ein *Restpunkt* von $f(x)$ in J_1.

Die damit definierten vier Punktklassen sind in offenen Intervallen definiert. Offensichtlich gehört jeder Punkt von J_1 einer und nur einer der vier Klassen an.

Die Benennung Linearpunkt rechtfertigt sich dadurch, daß $f(x)$ in einer Umgebung eines Linearpunktes linear ist.

Die Begriffe Konvex- bzw. Konkavpunkt umfassen alle inneren Argumentwerte eines Konvex- bzw. Konkavbogens der Funktionskurve von $f(x)$. Aber sie enthalten viel mehr. Beispielsweise ist der Punkt $x = 0$ ein Konvexpunkt folgender Funktionen:

$$f(x) = x^2\left(1 + \sin^2 \frac{1}{x}\right) \text{ für } x \neq 0,\ f(0) = 0 \tag{50a}$$

und

$$\begin{cases} f(x) = 1, & \text{wenn } x \text{ irrational} \\ f(x) = 0, & \text{wenn } x \leqq 0 \text{ rational} \\ f(x) = x^2\left(1 + \sin^2 \dfrac{1}{x}\right), & \text{wenn } x > 0 \text{ rational.} \end{cases} \tag{50b}$$

Nun sind die beiden Begriffe Konvex- und Konkavpunkt von $f(x)$ in J_1 miteinander nah verwandt; denn aus den Definitionen folgt unmittelbar

Satz 20. *Jeder Konvex- bzw. Konkavpunkt von $f(x)$ in J_1 ist Konkav- bzw. Konvexpunkt der Funktion $g(x) = -f(x)$ in J_1.*

Wir schaffen daher für diese beiden Begriffe einen Oberbegriff, den wir aber im *Segment* $\bar{J}_1$ definieren.

Definition 9. Unter einem *Hauptpunkt* der Funktion $f(x)$ im Segment $\bar{J}_1$ verstehen wir jeden Punkt, der entweder Konvex- oder Konkavpunkt im Intervall J_1 ist oder zu der Randpunktmenge $G(\bar{J}_1)$ gehört.

Wir führen Bezeichnungen ein. Es bedeute

$$(51)\quad \begin{cases} A(f, J_1) & \text{die Menge aller Linearpunkte von } f \text{ in } J_1, \\ H^+(f, J_1) & \text{die Menge aller Konvexpunkte von } f \text{ in } J_1, \\ H^-(f, J_1) & \text{die Menge aller Konkavpunkte von } f \text{ in } J_1, \\ R(f, J_1) & \text{die Menge aller Restpunkte von } f \text{ in } J_1, \\ H(f, \bar{J}_1) & \text{die Menge aller Hauptpunkte von } f \text{ in } \bar{J}_1. \end{cases}$$

Da jeder Punkt von J_1 einer und nur einer der vier ersten Mengen angehört, erhalten wir die Beziehung

$$(52)\qquad J_1 = A(f, J_1) \cup H^+(f, J_1) \cup H^-(f, J_1) \cup R(f, J_1).$$

Hieraus und aus Definition 9 folgt

$$(53)\qquad \bar{J}_1 = A(f, J_1) \cup H(f, \bar{J}_1) \cup R(f, J_1),$$

und aus Definition 9 unmittelbar

$$(54)\qquad H(f, \bar{J}_1) = H^+(J_1) \cup H^-(J_1) \cup G(\bar{J}_1).$$

Definitionsgemäß liegt jeder Linearpunkt in einer Umgebung U, deren sämtliche Punkte ebenfalls Linearpunkte sind. Das ergibt den

Satz 21. *Die Menge $A(f, J_1)$ ist eine offene Menge.*

Definitionsgemäß ist die Zugehörigkeit eines Punktes zu einer der vier in (51) zuerst aufgeführten Mengen von einer Veränderung des Umgebungsintervalles J_1 unabhängig. Wir erhalten

Satz 22. *Es sei $x_k \in J_1 \cap J_2$. Dann ist*

entweder $x_k \in A(f, J_1)$ *und* $x_k \in A(f, J_2)$
oder $x_k \in H^+(f, J_1)$ *und* $x_k \in H^+(f, J_2)$
oder $x_k \in H^-(f, J_1)$ *und* $x_k \in H^-(f, J_2)$
oder $x_k \in R(f, J_1)$ *und* $x_k \in R(f, J_2)$.

Die Zugehörigkeit eines Punktes zu einer der vier Mengen wird also durch die Funktion f allein bedingt; wir dürfen daher von den Linear-, Konvex-, Konkav- und Restpunkten einer Funktion $f(x)$ schlechthin sprechen, ohne Beziehung auf ein Intervall J_1.

Für den Begriff Hauptpunkt trifft dies nicht immer zu. Ist beispielsweise $\bar{J}_2 < \bar{J}_1$, so gehören die beiden Punkte der Menge $G(\bar{J}_2)$ zu $H(f, \bar{J}_2)$; sie brauchen aber keineswegs zu $H(f, \bar{J}_1)$ zu gehören. Betrachtet man jedoch nur die inneren Hauptpunkte in J_2, so gilt

Satz 22a. *Aus $\bar{J}_2 < \bar{J}_1$ folgt $J_2 \cap H(f, \bar{J}_2) = J_2 \cap H(f, \bar{J}_1)$.*

Die Hauptpunkte einer Funktion in einem Segment werden wir nun nach Stufen einteilen; diese Stufeneinteilung hängt von dem gewählten Segment ab.

Definition 10. Als *Hauptpunkte nullter Stufe* einer Funktion $f(x)$ in einem Segment $\bar{J}_1$ bezeichnen wir die beiden Randpunkte von $\bar{J}$; die Menge $G(\bar{J})$ schreiben wir dann $H_0(f, \bar{J})$. Es ist also

$$(55)\qquad H_0(f, \bar{J}) = G(\bar{J}).$$

Definition 11. Ein Punkt $x_j \in J_1$ heiße ein *konvexer bzw. konkaver Hauptpunkt erster Stufe* von $f(x)$ in J_1, wenn für jedes Punktepaar x_i, x_k, das den Bedingungen

$$(55a)\qquad x_i < x_j < x_k;\ x_i \in \bar{J}_1,\ x_k \in \bar{J}_1$$

genügt, die Beziehung (49b) bzw. (49c) gilt.

Die Menge der konvexen Hauptpunkte erster Stufe von $f(x)$ in J_1 bezeichnen wir mit $H_1^+(f, J_1)$, die der konkaven mit $H_1^-(f, J_1)$.

Definition 12. Jeder Punkt $x_j \in H_1^+(f, J_1) \cup H_1^-(f, J_1)$ heiße ein *Hauptpunkt erster Stufe* von $f(x)$ in J_1. Die Menge dieser Hauptpunkte erster Stufe bezeichnen wir mit $H_1(f, J_1)$.

Aus den Definitionen 11 und 12 folgt unmittelbar

$$H_1(f, J_1) = H_1^+(f, J_1) \cup H_1^-(f, J_1). \tag{56}$$

Verwenden wir die Definition 11 in der Definition 7, so erhalten wir

Satz 23. *Ein Punkt $x_j \in J_1$ ist dann und nur dann ein Konvexpunkt (Konkavpunkt) von $f(x)$ in J_1, wenn er eine Umgebung $U \leq J_1$ besitzt, in welcher er konvexer (konkaver) Hauptpunkt erster Stufe ist.*

Ist $J_1 \geqq J_2$ und $x_j \in J_2$, so folgt aus $x_j \in H_1^+(f, J_1)$ bzw. $x_j \in H_1^-(f, J_1)$ a fortiori $x_j \in H_1^+(f, J_2)$ bzw. $x_j \in H_1^-(f, J_2)$. Aus $x_j \in H_1^+(f, J_2)$ bzw. $x_j \in H_1^-(f, J_2)$ folgt aber $x_j \in H^+(f, J_2) \leqq H^+(f, J_1)$ bzw. $x_j \in H^-(f, J_2) \leqq H^-(f, J_1)$. Wir erhalten also

Satz 24. *Ist $J_1 \geqq J_2$, so ist*

$$J_2 \cap H_1^{\pm}(f, J_1) \leqq H_1^{\pm}(f, J_2) \leqq H^{\pm}(f, J_2) \leqq H^{\pm}(f, J_1), \tag{57a, b}$$

$$J_2 \cap H_1(f, J_1) \leqq H_1(f, J_2) \leqq H(f, J_2) \leqq H(f, \bar{J}_1) \cup G(J_2). \tag{57c}$$

Schließlich führen wir noch die Bezeichnungen

$$S_1^{\pm}(f, J_1) = H_0(f, \bar{J}_1) \cup H_1^{\pm}(f, J_1), \tag{58a, b}$$

$$S_1(f, J_1) = H_0(f, \bar{J}_1) \cup H_1(f, J_1) \tag{58c}$$

ein. Für diese Mengen S_1^+, S_1^-, S_1 erhalten wir den zu Satz 24 analogen

Satz 24a. *Aus $\bar{J}_1 \geqq \bar{J}_2$ folgt*

$$\bar{J}_2 \cap S_1^{\pm}(f, \bar{J}_1) \leqq S_1^{\pm}(f, \bar{J}_2), \tag{59a, b}$$

$$\bar{J}_2 \cap S_1(f, \bar{J}_1) \leqq S_1(f, \bar{J}_2) \leqq H(f, \bar{J}_2) < H(f, \bar{J}_1) \cup G(\bar{J}_2). \tag{59c}$$

Alle diese Definitionen und Sätze gelten für beliebige endliche Funktionen.

Wie wir sehen werden, wird für das Verhalten der Funktion $f(x)$ die Struktur ihrer Restpunktmenge $R(f, J)$ maßgeblich sein. Setzen wir nur die Endlichkeit von $f(x)$ voraus, so kann $R(f, J)$ mit J identisch sein, wie das Beispiel der Dirichletschen Funktion zeigt, die in allen rationalen Punkten x den Wert Null, in allen irrationalen den Wert Eins annimmt. Wie wir im folgenden Paragraphen sehen werden, kann bei stetigen Funktionen dieser Fall nicht eintreten.

§ 2. Die Hauptpunkte erster Stufe von stetigen Funktionen.

Von dieser Stelle an bedeute $f(x)$ stets eine *stetige* Funktion in dem Definitionsbereich $\bar{J} = [a, b]$; in a sei sie nach rechts, in b nach links stetig. Diese Stetigkeitsforderungen werden wir im folgenden nicht mehr unter den Voraussetzungen erwähnen.

Aus der Stetigkeit von $f(x)$ folgt die Stetigkeit einiger anderer Funktionen:

Satz 25. *Ist $a_1 \in \bar{J}$ und $b_1 \in \bar{J}$, so ist die Funktion $D(f; a_1, b_1; x)$ überall in $\bar{J}$ definiert und stetig.*

Beweis. Gemäß (33) ist $D(f; a_1, b_1; x)$ die Differenz der linearen (also stetigen) Funktion $L(f; a_1, b_1; x)$ und der stetigen Funktion $f(x)$.

Satz 25a. *Unter denselben Voraussetzungen sind die beiden Funktionen $Q(f; a_1, b_1, x)$ und $u(f; a_1, b_1; x)$ in allen Punkten $x \neq a_1$, $x \neq b_1$ des Segmentes $\bar{J}$ definiert und stetig.*

Beweis. 1. Nach (38) ist $Q(f; a_1, b_1, x)$ der Quotient der beiden stetigen Funktionen $D(f; a_1, b_1; x)$ und $(a_1 - x)(x - b_1)$, wobei der Divisor für $x = a_0$ und $x = b_1$ verschwindet.

2. Nach (41) ist $u(f; a_1, b_1; x) = (b_1 - a_1)\, Q(f; a_1, b_1, x)$.

Des weiteren folgern wir aus Satz 20 unmittelbar den

Satz 26. *Ist* $g(x) = -f(x)$, *so ist*

$$H_1^-(f, J_1) = H_1^+(g, J_1), \tag{60a}$$

$$H_1^+(f, J_1) = H_1^-(g, J_1), \tag{60b}$$

$$S_1^-(f, J_1) = S_1^+(g, J_1), \tag{60c}$$

$$S_1^+(f, J_1) = S_1^-(g, J_1). \tag{60d}$$

Dieser Satz erlaubt uns, zwei analoge Aussagen über die Struktur von Konvex- bzw. Konkavpunktmengen nur für den einen Mengentypus zu beweisen; für den anderen folgt die Richtigkeit der Aussage sodann aus Satz 26. Wir führen die Beweise immer für die Konkavpunktmengen.

Nunmehr beweisen wir die Richtigkeit der im Schlußsatz des vorhergehenden Paragraphen aufgestellten Behauptung:

Satz 27. *Ist* $f(x)$ *in* $\bar{J}_1 = [a_1, b_1]$ *nicht linear*[11]), *so ist die Menge* $H_1(f, J_1)$ *nicht leer, und zwar ist* $H_1^-(f, J_1)$ *dann und nur dann nicht leer, wenn ein Punkt* $x_0 \in J_1$ *existiert, für den* $Q(f; a_1, b_1, x) < 0$ *gilt. Analog ist* $H_1^+(f, J_1)$ *dann und nur dann nicht leer, wenn ein Punkt* $x_0 \in J_1$ *existiert, für den* $Q(f; a_1, b_1, x) > 0$ *ist.*

Beweis. Ist $x_0 \in H_1^-(f, J_1)$, so gilt nach Definition 11 die Abschätzung $Q(f; a_1, b_1, x_0) < 0$.

2. Es existiere ein Punkt $x_0 \in J_1$, für den $Q(f; a_1, b_1, x_0) < 0$ sei. Nach Satz 11 folgt daraus $D(f; a_1, b_1; x_0) < 0$. Die nach Satz 25 stetige Funktion $\varphi(x) = D(f; a_1, b_1; x)$ genügt daher den Bedingungen

$$\varphi(a_1) = \varphi(b_1) = 0; \quad \varphi(x_0) < 0.$$

Sie besitzt also in J_1 einen negativen Minimalwert, den sie auf einer nicht leeren, auf J_1 abgeschlossenen Menge $M \subset J_1$ annimmt. Besteht M nur aus einem Punkt, so bezeichnen wir diesen mit x_j; besteht M aus mehr Punkten, so gibt es in M wegen der Abgeschlossenheit von M einen kleinsten Wert x_j und einen größten Wert x_j'. Wir weisen nach, daß im ersten Fall x_j, im zweiten Falle x_j und x_j' Punkte von $H_1^-(f, J_1)$ sind.

Ist dann x_i, x_k ein (55a) genügendes Punktepaar, so ist im ersten Falle

$$\varphi(x_j) - \varphi(x_i) < 0; \quad \varphi(x_j) - \varphi(x_k) < 0,$$

im zweiten Falle

$$\varphi(x_j) - \varphi(x_i) < 0; \quad \varphi(x_j) - \varphi(x_k) \leqq 0.$$

Gemäß (34) folgt hieraus und aus (55a) in beiden Fällen

$$u(\varphi;\, x_i, x_k;\, x_j) = \frac{\varphi(x_k) - \varphi(x_j)}{x_k - x_j} - \frac{\varphi(x_j) - \varphi(x_i)}{x_j - x_i} > 0.$$

Nach Satz 13 ist daher auch $Q(\varphi; x_i, x_j, x_k) > 0$, somit $Q(-\varphi; x_i, x_j, x_k) < 0$. Hieraus folgt aber nach Satz 17, daß auch $Q(f; x_i, x_j, x_k) < 0$ ist, da $f(x)$ und $-\varphi(x)$ sich nur um die lineare Funktion $L(f; a_1, b_1; x)$ unterscheiden. Die letzte Ungleichung aber liefert $x_j \in H_1^-(f, J_1)$. Der Beweis für x_j' ist vollkommen analog.

Definition 13. Einen Punkt aus $H_1^-(f, J_1)$ bzw. aus $H_1^+(f, J_1)$, in welchem die Funktion $D(f; a_1, b_1; x)$ einen negativen Minimalwert bzw. einen positiven Maximalwert in $\bar{J}_1$ annimmt, heiße ein *konkaver bzw. konvexer Extremalhauptpunkt von* $f(x)$ *in* $\bar{J}_1$.

---

[11]) Das schließt nicht aus, daß $f(x)$ in $\bar{J}_1$ lineare Teilstücke besitzt.

Beide Begriffe fassen wir unter dem des *Extremalhauptpunktes* in $\bar{J}_1$ zusammen.

Wie man sich an Hand des Beweises von Satz 27 leicht überzeugt, hat eine in $\bar{J}_1$ nicht lineare Funktion mindestens einen und höchstens vier Extremalhauptpunkte in $\bar{J}_1$.

Aus Satz 27 ziehen wir einige Folgerungen, die wir in Form von Korollaren zusammenstellen.

Korollar 1 zu Satz 27. *Die Menge $J_1 \cap H(f, \bar{J}_1)$ ist dann und nur dann leer, wenn f in $\bar{J}_1$ linear ist.*

Ist nämlich f in $\bar{J}_1$ linear, so ist $\Lambda(f, J_1) = J_1$, daher $J_1 \cap H(f, \bar{J}_1)$ leer. Ist aber f in $\bar{J}_1$ nicht linear, so ist $J_1 \cap H(f, \bar{J}_1)$ auf Grund von (57c) und Satz 27 nicht leer.

Korollar 2 zu Satz 27. *Existiert in $\bar{J}_1$ ein Punkttripel $x_i < x_j < x_k$, für welches $Q(f; x_i, x_j, x_k) < 0$ bzw. > 0 gilt, so enthält das Intervall (x_i, x_k) einen Konkav- bzw. einen Konvexpunkt von $f(x)$.*

Korollar 3 zu Satz 27. *Die Menge $H(f, \bar{J}_1) \cup \Lambda(f, J_1)$ ist überall dicht auf $\bar{J}_1$.*

Ist nämlich $J_2 \subset J_1$, und ist f in J_2 linear, so ist $J_2 \leq \Lambda(f, J_1)$. Ist aber f in J_2 nicht linear, so liefert Satz 27 einen Punkt $x_j \in J_2 \cap H(f, \bar{J}_2)$, für den nach Satz 22 auch $x_j \in J_2 \cup H(f, \bar{J}_1)$ gilt. Das letzte Korollar bestätigt die Richtigkeit der am Schlusse des vorhergehenden Paragraphen gemachten Bemerkung. Wir werden dieses Ergebnis aber sogleich wesentlich verschärfen.

§ 3. Die Restpunkte stetiger Funktionen.

Satz 28. *Ist mindestens eine der beiden Mengen $H^-(f, J_1)$ und $H^+(f, J_1)$ leer, so ist auch $R(f, J_1)$ leer.*

Beweis. Sind beide Mengen leer, so ist nach Korollar 1 zu Satz 27 die Funktion f in J_1 linear. Es ist daher $\Lambda(f, J_1) = J_1$, und damit $R(f, J_1)$ leer.

Nun sei etwa $H^+(f, J_1)$ leer, aber $H^-(f, J_1)$ nicht leer. Aus dieser Annahme folgt mit Hilfe des Korollars 2 zu Satz 27, daß für alle Punkttripel x_i, x_j, x_k aus $\bar{J}_1$ die Ungleichung

$$Q(f; x_i, x_j, x_k) \leqq 0 \tag{61}$$

gilt. Jetzt sei x_j ein beliebiger Punkt in J_1. Dann werden wir $x_j \bar{\in} R(f, J_1)$ nachweisen. Dabei unterscheiden wir drei Fälle.

Erster Fall. Für alle Punktepaare x_i, x_k einer gewissen Umgebung von x_j gelte in (61) das Gleichheitszeichen. Dann ist $x_j \in \Lambda(f, J_1)$ also $x_j \bar{\in} R(f, J_1)$.

Zweiter Fall. Für alle Punktepaare x_i, x_k in einer gewissen Umgebung U von x_j, welche den Bedingungen (48a) und (48b) genügen, gelte in (61) das Zeichen $<$. Dann ist $x_j \in H^-(f, J_1)$, also $x_j \bar{\in} R(f, J_1)$.

Dritter Fall. In jeder Umgebung von x_j existiere sowohl ein Punktepaar x_i, x_k, das den Bedingungen

$$x_i < x_j < x_k; \quad Q(f; x_i, x_j, x_k) = 0, \tag{62}$$

als auch ein Punktepaar x_i', x_k', das den Bedingungen

$$x_i' < x_j < x_k'; \quad Q(f; x_i', x_j, x_k') < 0 \tag{63}$$

genügt. Wir weisen nach, daß diese Annahme uns in Widerspruch bringt zu der Voraussetzung, nach welcher $H^+(f, J_1)$ leer ist.

Wir wählen zuerst ein Punktepaar x_i, x_k, welches den Bedingungen (62) genügt, sodann ein zweites Punktepaar x_i', x_k', welches den Bedingungen (63) genügt; wir wählen es so, daß

$$x_i < x_i' < x_j < x_k' < x_k \tag{64}$$

ist. Auf dieses Quintupel wenden wir die Identität (47) an; diese ergibt, wenn wir (62) beachten:

$$0 = (x_i' - x_i)\, Q(f; x_i, x_i', x_j) + (x_k' - x_i')\, Q(f; x_i', x_j, x_k') + (x_k - x_k')\, Q(f; x_j, x_k', x_k). \tag{65}$$

Der zweite Summand rechter Hand ist auf Grund von (63) und (64) negativ; mindestens einer der beiden anderen Summanden daher positiv. Beachtet man dabei (64), so ergibt sich durch diese Feststellung, daß mindestens eine der beiden Diskriminanten $Q(f; x_i, x_1', x_j)$ und $Q(f; x_j, x_k', x_k)$ positiv ist. Und hieraus liefert das Korollar 2 zu Satz 27 die Existenz eines Konvexpunktes von f in J_1, womit der Widerspruch zu der Voraussetzung hergestellt ist.

Nunmehr können wir den in der Einleitung erwähnten Zusammenhang zwischen der Menge R und den Mengen H^+ und H^- leicht beweisen:

Korollar 1 zu Satz 28. *Es ist*

$$R(f, J) \leq [H^-(f, J)]'; \quad R(f, J) \leq [H^+(f, J)]'. \tag{66}$$

Ist nämlich $x_r \in R(f, J)$, und $U \leq J$ eine Umgebung von x_r, so ist nach Satz 28 weder $H^-(f, U) = U \cap H^-(f, J)$ noch $H^+(f, U) = U \cap H^+(f, J)$ leer.

Korollar 2 zu Satz 28. *Ist $R(f, J_1)$ überall dicht auf J_1, so ist auch jede der beiden Mengen $H^-(f, J_1)$ und $H^+(f, J_1)$ überall dicht auf J_1, die Menge $\Lambda(f, J_1)$ aber leer.*

Die beiden ersten Behauptungen ergeben sich unmittelbar aus dem ersten Korollar. Daß aber die (nach Satz 21) offene Menge $\Lambda(f, J_1)$ hier leer ist, folgt daraus, daß ihre auf J_1 komplementäre Menge überall dicht auf J_1 ist.

§ 4. Die Struktur der Mengen $S_1^-(f, \bar{J}_1)$ und $S_1^+(f, \bar{J}_1)$.

Der folgende Satz ist für die weiteren Entwicklungen grundlegend. Bevor wir ihn formulieren, führen wir noch, anschließend an die Bezeichnungen (58a, b, c) die Mengen

$$E_1^{\pm}(f, J_1) = \bar{J}_1 \setminus S_1^{\pm}(f, \bar{J}_1), \tag{67a, b}$$

$$E_1(f, J_1) = \bar{J}_1 \setminus S_1(f, J_1) \tag{67c}$$

ein.

Satz 29. *Jede der drei Mengen $S_1^-(f, \bar{J}_1)$, $S_1^+(f, \bar{J}_1)$ und $S_1(f, \bar{J}_1)$ ist auf $\bar{J}_1$ vollkommen abgeschlossen, jede der drei Mengen $E_1^-(f, J_1)$, $E_1^+(f, J_1)$, $E(f, J_1)$ ist offen.*

Beweis. Da die ersten drei Behauptungen auf Grund von (67a, b, c) aus den letzten drei folgen, genügt es, diese letzten drei zu beweisen.

Wir weisen nach, daß $E_1^-(f, J_1)$ offen ist. Es sei $x_j \in E_1^-(f, J_1)$; damit existiert mindestens ein (55) genügendes Punktepaar x_i, x_k, für welches die Abschätzung

$$Q(f; x_i, x_j, x_k) \geqq 0 \tag{68}$$

gilt. Dabei haben wir zwei Fälle zu unterscheiden.

Erster Fall. Es ist $Q(f; x_i, x_j, x_k) > 0$. Da die Funktion $Q(f; x_i, x_k, x)$ nach Satz 25a im Punkte $x = x_j$ stetig ist, so gilt für alle Punkte x einer gewissen Umgebung U von x_j ebenfalls $Q(f; x_i, x_k, x) > 0$. Es ist also $U \leq E_1^-(f, J_1)$, und damit x_j ein innerer Punkt von $E_1^-(f, J_1)$.

Zweiter Fall. Für alle (55a) genügenden Punktepaare x_i, x_k sei

(69) $$Q(f; x_i, x_j, x_k) \leqq 0,$$

und für ein bestimmtes Paar x_i', x_k' sei

(69a) $$Q(f; x_i', x_j, x_k') = 0.$$

Dann können wir die Zugehörigkeit

(70) $$(x_i', x_k') \subset E_1^-(f, J_1)$$

nachweisen. Es sei $x_m \in (x_i', x_j)$. Wir nehmen an, es gehöre x_m nicht zu $E_1^-(f, J_1)$; daraus folgt $x_m \in H_1^-(f, J_1)$. Nach Definition 11 ist also

(71) $$Q(f; x_i', x_m, x_j) < 0.$$

Hieraus, aus (69a) und der Anordnung $x_i' < x_m < x_j < x_k'$ folgt nach Satz 19, IV die Abschätzung

$$Q(f; x_m, x_j, x_k') > 0,$$

im Widerspruch zu der Annahme (69). Damit ist

(72a) $$(x_i', x_j) \subset E_1^-(f, J_1)$$

nachgewiesen, und analog erhält man

(72b) $$(x_j, x_k') \subset E_1^-(f, J_1).$$

Aus (72a), (72b) und $x_j \in E_1^-(f, J_1)$ folgt aber in der Tat (70). Es ist also x_j auch in diesem zweiten Fall ein innerer Punkt von $E_1^-(f, J_1)$. Damit ist $E_1^-(f, J_1)$ eine offene und $S_1^-(f, \bar{J}_1)$ eine auf J_1 abgeschlossene Menge. Das letztere gilt gemäß Satz 20 auch für $S_1^+(f, \bar{J}_1)$. Schließlich ist dann auch $S_1(f, \bar{J}_1)$ als die Vereinigungsmenge zweier auf $\bar{J}_1$ abgeschlossener Mengen selbst auf $\bar{J}_1$ abgeschlossen. Da jede der drei Mengen S_1^-, S_1^+, S_1 die Randpunktmenge $G(\bar{J}_1)$ enthält, sind sie auch vollkommen abgeschlossen auf $\bar{J}_1$.

Nach dem soeben bewiesenen Satz bestehen die Mengen $E_1^-(f, J_1)$, $E_1^+(f, J_1)$, $E_1(f, J_1)$, da sie offen sind, aus Komponenten. Für die Komponenten von E_1^- bzw. E_1^+ gilt der folgende (geometrisch leicht einzusehende)

Satz 30. *Ist $K = (c, d)$ eine Komponente von $E_1^-(f, J_1)$, so ist $H_1^-(f, K)$ leer; ist K eine Komponente von $E_1^+(f, J_1)$ so ist $H_1^+(f, K)$ leer.*

Beweis. Es genügt, die erste Behauptung zu beweisen. Wir nehmen an, es sei $H_1^-(f, K)$ nicht leer. Es existiert also ein Punkt x_j, der folgende Bedingungen erfüllt:

(73a) $$x_j \in K \subseteq E_1^-(f, J_1)$$

und

(73b) $$x_j \in H_1^-(f, K).$$

Es sei x_i, x_k ein (55a) genügendes Punktepaar. Dann werden wir nachweisen können, daß stets

(74) $$Q(f; x_i, x_j, x_k) < 0,$$

also $x_j \in H_1^-(f, \bar{J}_1)$ ist, im Widerspruch zu (73a).

Es sei $\bar{J}_1 = [a_1, b_1]$. Dann sind vier Fälle zu untersuchen:

a) $x_i \in K$; $x_k \in K$. Dann gilt (74) wegen (73b).

b) $x_i \in [a_1, c)$, $x_k \in K$, wobei $a_1 < c$ ist. Wegen $c \in H_1^-(f, J_1)$ ist dann erstens $Q(f; x_i, c, x_j) < 0$, wegen (73b) ist zweitens $Q(f; c, x_j, x_k) < 0$, und die beiden letzten Ungleichungen liefern mit Hilfe des Satzes (19) die Ungleichung (74).

c) $x_i \in K$, $x_k \in (d, b_1]$; $d < b_1$. Dieser zum Fall b) symmetrische Fall wird analog behandelt.

d) $x_i \in [a_1, c)$, $x_k \in (d, b_1]$; $a_1 < c$, $d < b_1$. Wegen $c \in H_1^-(f, J_1)$ und $d \in H_1^-(f, J_1)$ ist

$$Q(f; x_i, c, x_j) < 0, \quad Q(f; x_j, d, x_k) < 0,$$

wegen (73b) außerdem $Q(f; c, x_j, d) < 0$; aus diesen drei Ungleichungen folgt aber mit Hilfe des Satzes (19) wieder die Ungleichung (74). Damit ist der Satz bewiesen.

Aus diesem Satze ziehen wir noch eine Folgerung:

Korollar zu Satz 30. *In jeder Komponente $K = (c, d)$ der Menge $E_1^-(f, J_1)$ ist $L(f; c, d; x) \geqq f(x)$; in jeder Komponente $K = (c, d)$ von $E_1^+(f, J_1)$ ist $L(f; c, d; x) \leqq f(x)$.*

Das ergibt sich aus (33), Satz 11 und Satz 30.

§ 5. Die Hauptpunkte höherer Stufen.

In Analogie zu (58c) setzen wir noch, wobei wir Definition 10 benutzen:

$$S_0(f, \bar{J}_1) = H_0(f, \bar{J}_1) = G(\bar{J}_1), \tag{75a}$$

und in Analogie zu (67c):

$$E_0(f, J_1) = \bar{J}_1 \setminus S_0(f, \bar{J}_1) = J_1. \tag{75b}$$

Für $n = 0$ und $n = 1$ gilt dann gemeinsam, daß $S_n(f, \bar{J}_1)$ auf $\bar{J}_1$ vollkommen abgeschlossen, $E_n(f, J_1)$ offen ist. Für $n = 1$ ist dabei $S_n(f, \bar{J}_1)$ durch (58c) definiert.

Einer induktiven Definition der Hauptpunkte höherer Stufen dürfen wir daher folgende Annahme zugrunde legen:

Für jeden Index $r = 0, 1, \ldots, n$ seien die Hauptpunkte r-ter Stufe von f in J_1 definiert. Bezeichnen wir die Menge der Hauptpunkte r-ter Stufe in J_1 mit $H_r(f, J_1)$, so sei die Summe

$$S_r(f, \bar{J}_1) = H_0(f, \bar{J}_1) \cup \left[\bigcup_{s=1}^{r} H_s(f, J_1)\right] = S_{r-1}(f, \bar{J}_1) \cup H_r(f, J_1) \tag{76}$$

auf $\bar{J}_1$ vollkommen abgeschlossen, die Menge

$$E_r(f, J_1) = \bar{J}_1 \setminus S_r(f, \bar{J}_1) \tag{77}$$

daher offen.

Von dieser Annahme ausgehend, definieren wir die Hauptpunkte der $(n + 1)$-ten Stufe in J_1 und ihre Menge $H_{n+1}(f, J_1)$ und zwar so, daß die Menge

$$S_{n+1}(f, \bar{J}_1) = S_n(f, \bar{J}_1) \cup H_{n+1}(f, J_1) \tag{78}$$

wieder auf $\bar{J}_1$ vollkommen abgeschlossen ist.

Ist erstens die offene Menge $E_n(f, J_1)$ leer, so ist $S_n(f, \bar{J}_1) = \bar{J}_1$. Sämtliche Punkte von $\bar{J}_1$ sind also Hauptpunkte von höchstens n-ter Stufe. Wir definieren daher, daß in diesem Falle jede der Mengen $H_{n+m}(f, J_1)$ für $m \geqq 1$ leer sein soll.

Ist zweitens $E_n(f, J_1)$ nicht leer, so besteht E_n aus abzählbar vielen Komponenten $K_{n,s}$ $(s = 1, 2, \ldots)$. Jede Komponente enthält eine eindeutig bestimmte Menge $H_1(f, K_{n,s})$, und wir setzen

$$H_{n+1}(f, J_1) = \bigcup_s H_1(f, K_{n,s}). \tag{79}$$

Nach (78) ist dann

$$S_{n+1}(f, \bar{J}_1) = S_n(f, \bar{J}_1) \cup \left[\bigcup_s S_1(f, \bar{K}_{n,s})\right]; \tag{80}$$

wir dürfen S_1 anstatt H_1 schreiben, weil die Punkte der Mengen $G(K_{n,s})$ schon in $S_n(f, \bar{J}_1)$ enthalten sind.

Die Menge $S_{n+1}(f, \bar{J}_1)$ ist auf $\bar{J}_1$ gemäß Satz 5 vollkommen abgeschlossen, den wir mit S_n an Stelle von A_0, mit $S_1(f, \bar{K}_{n,s})$ an Stelle von A_s, und mit S_{n+1} an Stelle von A anwenden dürfen. Damit läßt sich aber das Verfahren beliebig fortsetzen.

Auf diese Weise ist die Menge $H_n(f, J_1)$ der Hauptpunkte n-ter Stufe von f in J_1 für jeden Index $n \geqq 0$ definiert, ebenso die Menge $S_n(f, \bar{J}_1)$ der Hauptpunkte höchstens n-ter Stufe in $\bar{J}_1$, und schließlich noch die offene Menge $E_n(f, J_1)$.

Über diese Mengen gelten folgende Sätze:

Satz 31. *Ist $K_{n,s}$ eine Komponente von $E_n(f, J_1)$, so ist $K_{n,s} \cap H_{n+1}(f, J_1)$ dann und nur dann leer, wenn $f(x)$ in $K_{n,s}$ linear ist.*

Beweis. Nach der Definition von H_{n+1} besagt die Voraussetzung, daß $H_1(f, K_{n,s})$ leer ist. Damit liefert das Korollar 1 zu Satz 27 die Behauptung.

Satz 32. *Keine der Mengen $S_n(f, \bar{J}_1)$ ist leer, jede ist vollkommen abgeschlossen auf $\bar{J}_1$. Außerdem ist*

$$S_n(f, \bar{J}_1) \leqq S_{n+1}(f, \bar{J}_1). \tag{81}$$

Beweis. Stets ist $S_n(f, \bar{J}_1) \geqq S_0(f, \bar{J}_1) = G(\bar{J}_1)$. Die vollkommene Abgeschlossenheit ist schon im vorhergehenden bewiesen. Und die Relation (81) folgt aus (78).

§ 6. Die Menge der erreichbaren Hauptpunkte in $\bar{J}$.

Wir betrachten jetzt wieder das ganze Definitionssegment $\bar{J} = [a, b]$. Aus der Konstruktion der Mengen $H_n(f, J)$ ergibt sich leicht, daß je zwei dieser Mengen, etwa $H_n(f, J)$ und $H_m(f, J)$ punktfremd sind. Es ist somit

$$H_n(f, J) \cap H_m(f, J) \text{ leer, wenn } n \neq m \text{ ist.} \tag{82}$$

Die Mengen $S_n(f, \bar{J})$ sind nach (81) monoton nicht abnehmend und wegen $S_n(f, \bar{J}) \subseteq J$ beschränkt. Es existiert also $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(f, \bar{J})$, und wir setzen

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f, \bar{J}) = S(f, \bar{J}). \tag{83}$$

Auf Grund von (79) und (80) ist dann

$$S(f, \bar{J}) = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n(f, \bar{J}) = H_0(f, \bar{J}) \cup \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n(f, J)\right]. \tag{84}$$

Definition 14. Die durch (83) definierte Menge $S(f, \bar{J})$ nennen wir *die Menge der in $\bar{J}$ erreichbaren Hauptpunkte* von $f(x)$.

Aus dieser Definition und aus (82) erhalten wir

Satz 33. *Jeder in $\bar{J}$ erreichbare Hauptpunkt ist in einer und nur einer der Mengen $H_n(f, J_1)$ enthalten.*

Jetzt weisen wir nach, daß (84) eine kanonische Summendarstellung von $S(f, \bar{J})$ ist. Denn es ist

(a) $S_0(f, \bar{J}) = G(\bar{J})$ gemäß (75a);

(b) jede der Mengen $S_n(f, \bar{J})$ auf $\bar{J}$ vollkommen abgeschlossen, wie im vorhergehenden Paragraphen bewiesen wurde;

(c) $S_n(f, \bar{J}) \leqq S_{n+1}(f, \bar{J})$ gemäß (81).

(d) Ist $K_{n,s}$ eine Komponente von $E_n(f, J)$, so ist $K_{n,s} \cap S_{n+1}(f, \bar{J})$ dann und nur dann leer, wenn $K_{n,s} \cap S(f, \bar{J})$ leer ist. Dies ergibt sich leicht aus Satz 31.

Die Bedingungen (5a) bis (6) sind somit für die Mengen $S_n(f, \bar{J})$ in der Tat erfüllt. Damit liefert Satz 6 (oder Satz 6a) den

Satz 34. *Die Menge $S(f, \bar{J})$ aller in $\bar{J}$ erreichbaren Hauptpunkte von $f(x)$ ist eine vollkommene F_σ-Menge auf $\bar{J}$.*

Die zu $S(f, \bar{J})$ komplementäre Menge

$$E(f, J) = \bar{J} \setminus S(f, \bar{J}) \tag{85}$$

können wir auf Grund von (77) und (84) in der Form

$$E(f, J) = \bigcap_{n=0}^{\infty} E_n(f, J) \tag{85a}$$

schreiben; daß dies eine kanonische Durchschnittdarstellung ist, folgt daraus, daß $E_n(f, J) = \bar{J} \setminus S_n(f, \bar{J})$ und (84) eine kanonische Summendarstellung ist.

Daraus und aus Satz 7a ergibt sich

Satz 35. *Die Menge $E(f, J)$ ist eine G_δ-Menge auf J.*

Schließlich vermerken wir noch die beiden Beziehungen:

$$S(f, \bar{J}) \leqq H(f, \bar{J}), \tag{86a}$$

$$E(f, J) \geqq \Lambda(f, J) \cup R(f, J). \tag{86b}$$

Die erste ist trivial, da $S(f, \bar{J})$ nur Hauptpunkte enthält, die zweite folgt aus der ersten und (85) mit Hilfe von (53).

§ 7. Die in $\bar{J}$ nicht erreichbaren Hauptpunkte.

Gilt in (86a) das Gleichheitszeichen, so haben wir unser Hauptziel, nämlich den Nachweis, daß $H(f, \bar{J})$ eine vollkommene F_σ-Menge auf $\bar{J}$ ist, mit Satz 34 erreicht. Das ist, wie wir sehen werden, stets der Fall, wenn $\Lambda(f, J)$ leer ist, die Funktion $f(x)$ also keine linearen Teilstücke enthält. Ist aber $\Lambda(f, J)$ nicht leer, so kann der Fall eintreten, daß dann die Menge $H(f, \bar{J}) \setminus S(f, \bar{J})$, die wir die *Menge der in $\bar{J}$ nicht erreichbaren Hauptpunkte* nennen, nicht leer ist. Sie besteht aber, wie sich zeigen wird, nur aus Endpunkten der Komponenten von $\Lambda(f, J)$, ist also abzählbar.

Dem Beweis schicken wir einen Satz voraus.

Satz 36. *Es sei $\bar{J} = [a, b] > \bar{J}_1 = [a_1, b_1]$, außerdem sei $f(x)$ in J_1 nicht linear, und x_j ein konkaver bzw. konvexer Extremalhauptpunkt*[12]) *von $f(x)$ in $\bar{J}_1$. Dann existiert ein Intervall $J_2 \leqq \bar{J}$, das den beiden Bedingungen genügt:*

$x_j \in H_1^-(f, J_2)$ bzw. $x_j \in H_1^+(f, J_2)$ und $\bar{J}_2 > \bar{J}_1$, wenn $G(J_1) \cap G(J)$ nicht leer bzw. $J_2 > \bar{J}_1$, wenn $G(J_1) \cap G(J)$ leer ist[13]).

Beweis (für den konkaven Fall). Drei Möglichkeiten sind zu unterscheiden: es kann

a) $a < a_1 < b_1 < b$, b) $a \leqq a_1 < b_1 < b$, c) $a < a_1 < b_1 \leqq b$

sein. Wir führen den Beweis für a); die Beweise für b) und c) sind analog und etwas einfacher.

Setzen wir $\varphi(x) = D(f; a_1, b_1; x)$, so ist nach der Definition des konkaven Extremalhauptpunktes

$$\varphi(x_j) - \varphi(a_1) < 0; \quad \varphi(x_j) - \varphi(b_1) < 0. \tag{87}$$

---

[12]) Vgl. Definition 13.

[13]) Wir sagen dann: J_2 umfaßt J_1 in J.

Infolge der Stetigkeit von $\varphi(x)$ existieren daher zwei Segmente

$$\bar{J}_3 = [a_2, a_1] \prec \bar{J}; \quad \bar{J}_4 = [b_1, b_2] \prec \bar{J} \tag{88}$$

von der Beschaffenheit, daß

(89a) aus $x_i \in \bar{J}_3$ die Ungleichung $\varphi(x_j) - \varphi(x_i) < 0$

(89b) aus $x_k \in \bar{J}_4$ die Ungleichung $\varphi(x_j) - \varphi(x_k) < 0$

folgt. Ist aber $x_i \in [a_1, x_j)$, $x_k \in (x_j, b_1]$, so gilt — wie im Beweis zu Satz 27 — eines der drei Beziehungspaare:

(90a) $\varphi(x_j) - \varphi(x_i) < 0; \ \varphi(x_j) - \varphi(x_k) = 0$

(90b) $\varphi(x_j) - \varphi(x_i) = 0; \ \varphi(x_j) - \varphi(x_k) < 0$

(90c) $\varphi(x_j) - \varphi(x_i) < 0; \ \varphi(x_j) - \varphi(x_k) < 0.$

Setzen wir nun

$$\bar{J}_2 = \bar{J}_1 \cup \bar{J}_3 \cup \bar{J}_4 = [a_2, b_2],$$

so gilt für jedes Punktepaar x_i, x_k, das den Bedingungen

$$x_i < x_j < x_k; \ x_i \in \bar{J}_2, \ x_k \in \bar{J}_2$$

genügt, eines der drei Beziehungspaare (90a) bis (90c).

Daraus folgt, auf dieselbe Weise wie im Beweis des Satzes 27, daß $x_j \in H_1^-(f, J_2)$ ist. Damit ist Satz 37 bewiesen.

Wir bemerken nun, daß wegen (86a) und (53) für die Menge der in $\bar{J}$ nicht erreichbaren Hauptpunkte die Gleichung

$$H(f, \bar{J}) \setminus S(f, \bar{J}) = E(f, J) \setminus R(f, J) \setminus \Lambda(f, J) \tag{91}$$

besteht. Die Frage nach der Existenz von Hauptpunkten, die in $\bar{J}$ nicht erreichbar sind, ist damit gleichbedeutend mit der Frage nach der Existenz von Hauptpunkten, die in $E(f, J)$ enthalten sind.

Jede der offenen Mengen $E_n(f, J)$ besteht aus abzählbar vielen Komponenten, die wir mit $K(n, s)$ $(s = 1, 2, \ldots)$ bezeichnen wollen, und jeder Punkt $x_j \in E(f, J)$ bestimmt[14]) genau eine Schachtelung $\{K[n, s(n, x_j)]\}$, $n = 1, 2, \ldots$, zu deren Durchschnitt er gehört. Dieser Durchschnitt kann ein Punkt oder ein Ausschnitt sein. Das gibt uns die Möglichkeit, die Menge $E(f, J)$ in zwei punktfremde Teilmengen aufzuspalten:

$$E(f, J) = E_p(f, J) \cup E_\Lambda(f, J), \tag{92}$$

wobei

(93a) $x_j \in E(f, J)$ dann zu $E_p(f, J)$ gehört, wenn der Durchschnitt $\bigcap_{n=0}^{\infty} K[n, s(n, x_j)]$ ein Punkt ist,

(93b) $x_j \in E(f, J)$ dann zu $E_\Lambda(f, J)$ gehört, wenn der Durchschnitt $\bigcap_{n=0}^{\infty} K[n, s(n, x_j)]$ ein Ausschnitt ist.

Satz 37. *Es ist*

$$E_p(f, J) \leqq R(f, J). \tag{94}$$

Beweis. Es sei $x_j \in E_p(f, J)$. Wir führen den Nachweis, daß weder $x_j \in \Lambda(f, J)$ noch $x_j \in H(f, \bar{J})$ stattfinden kann, woraus dann auf Grund von (53) die Behauptung folgt.

[14]) Vgl. Abschn. 1, § 4.

Wir bezeichnen die Endpunkte der Komponente $K[n, s(n, x_j)]$ mit a_n, b_n, die Komponente selbst also mit (a_n, b_n). Dann ist

(95) $$a_n \leqq a_{n+1} < x_j < b_{n+1} \leqq b_n, \quad a_n \in \bar{J} \setminus E_n(f, \bar{J}) = S_n(f, J) \subseteq H(f, \bar{J}),$$

und ebenso $b_n \in H(f, \bar{J})$. Wegen $x_j \in E_p(f, J)$ ist außerdem

(96) $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = x_j.$$

Es ist x_j somit Häufungspunkt der Menge $\bar{J} \setminus \Lambda(f, J)$, woraus, weil $\Lambda(f, \bar{J})$ offen ist, $x_j \bar{\in} \Lambda(f, J)$ folgt.

Nun nehmen wir $x_j \in H(f, \bar{J})$ an. Nach Satz 23 ist x_j dann Hauptpunkt erster Stufe in einer Umgebung $U \subset J$ von x_j, also

(97) $$x_j \in H_1(f, U).$$

Aus (95) bis (97) folgt die Existenz eines kleinsten Index $n = N$, für den

(98) $$K[N, s(N, x_j)] \subseteq U$$

erfüllt ist, und nunmehr aus (97) und (98) mit Hilfe der Beziehung (57c):

$$x_j \in H_1[f;\ K(N, s(N, x_j))].$$

Nach der in § 5 gegebenen Definition ergibt sich hieraus, wobei wir noch (84) verwenden:

$$x_j \in H_{N+1}(f, J) \subset S(f, \bar{J}).$$

Das steht im Widerspruch zu unserer Annahme $x_j \in E(f, J) = \bar{J} \setminus S(f, \bar{J})$. Damit ist Satz 37 vollständig bewiesen.

Korollar zu Satz 37. *Die Menge $E_p(f, J)$ enthält keine Hauptpunkte der Funktion $f(x)$.*

Bevor wir die Menge $E_\Lambda(f, J)$ untersuchen, führen wir noch eine zweckdienliche Bezeichnung ein. Jede Komponente der offenen Menge $\Lambda(f, J)$ besitzt zwei Randpunkte; die Menge dieser Randpunkte der einzelnen Komponenten[15]), die offensichtlich abzählbar und nirgends dicht ist, bezeichnen wir mit $\lambda(f, \bar{J})$. Da $\lambda(f, \bar{J})$ zu $\bar{J} \setminus \Lambda(f, J)$ gehört, ist wegen (53)

(99) $$\lambda(f, \bar{J}) \subseteq H(f, \bar{J}) \cup R(f, J).$$

Satz 38. *Es ist*

(100) $$\Lambda(f, J) \subseteq E_\Lambda(f, J) \subseteq \Lambda(f, J) \cup \lambda(f, J).$$

Beweis. 1. Gemäß (86b) und (92) ist

$$\Lambda(f, J) \subseteq E_p(f, J) \cup E_\Lambda(f, \bar{J});$$

hieraus und aus Satz 37 folgt $\Lambda(f, J) \subseteq E_\Lambda(f, J)$.

2. Nun sei $x_j \in E_\Lambda(f, J)$; der Durchschnitt $\bigcap_{n=0}^{\infty} K[n, s(n, x_j)]$ ist also ein Ausschnitt $\langle c, d\rangle$. Das Intervall (c, d) bezeichnen wir dann mit $K(\infty, x_j)$, das Segment $[c, d]$ also mit $\bar{K}(\infty, x_j)$. Ist $f(x)$ in $K(\infty, x_j)$ linear, so ist $K(\infty, x_j) \subseteq \Lambda(f, J)$, also $\bar{K}(\infty, x_j) \subseteq \Lambda(f, J) \cup \lambda(f, J)$. Trifft dies für jede Wahl des Punktes $x_j \in E_\Lambda(f, J)$ zu, so folgt daraus (100).

Nun nehmen wir an, es gebe einen Punkt $x_j \in E_\Lambda(f, J)$ von der Beschaffenheit, daß die Funktion $f(x)$ in dem Intervall $K(\infty, x_j) = (c, d)$ nicht linear sei. Schreiben wir kurz K an Stelle von $K(\infty, x_j)$, so existiert[16]) in diesem Falle ein Extremalhauptpunkt

(101) $$x_m \in K$$

[15]) Man verwechsle diese Menge nicht mit der Menge der Randpunkte von $\Lambda(f, J)$; diese ist zwar auch nirgends dicht, kann aber die Mächtigkeit des Kontinuums haben.

[16]) Vgl. Definition 13ff.

von $f(x)$ in K. Definitionsgemäß ist damit

(101a) $$x_m \in H_1(f, K),$$

somit a fortiori $x_m \in H(f, \bar{K})$; auf Grund von (101) und Satz 22a erhalten wir hieraus

(102) $$x_m \in H(f, \bar{J}).$$

Da außerdem $x_m \in E_\Lambda(f, J) \leq E(f, \bar{J}) = \bar{J} \setminus S(f, J)$ ist, so ergibt sich hieraus und aus (102):

(103) $$x_m \in H(f, \bar{J}) \setminus S(f, \bar{J}).$$

Nun unterscheiden wir die beiden Fälle $K = J$ und $K < J$.

Im ersten Falle folgt aus (101a) und (84):

$$x_m \in H_1(f, J) < S(f, \bar{J}),$$

im Widerspruch zu (103).

Im zweiten Falle ist $\bar{K} < \bar{J}$. Da x_m Extremalhauptpunkt von $f(x)$ in $\bar{K}$ ist, so liefert Satz 37 ein $\bar{K}$ in $\bar{J}$ umfassendes Segment $\bar{J}_1$, das der Bedingung

(104) $$x_m \in H_1(f, J_1)$$

genügt. Wegen $\bigcap_{n=0}^{\infty} K[n, s(n, x_j]) = \langle c, d \rangle \leq \bar{K}$ existiert daher ein kleinster Index $n = N$, für welchen

(105) $$K[N, s(N, x_j)] \leq J_1$$

erfüllt ist. Aus (104) und (105) aber erhalten wir mit Hilfe von (57c):

$$x_m \in H_1(f; K(N, s(N, x_j)),$$

und hieraus, nach der Definition des § 5 in Verbindung mit (84):

$$x_m \in H_{N+1}(f, J) < S(f, \bar{J}),$$

im Widerspruch zu (103).

Es ist somit $f(x)$ für jeden Punkt $x_j \in E_\Lambda(f, J)$ im Intervall $K(\infty, x_j)$ linear, und damit — wie schon oben gezeigt — die Behauptung (100) bewiesen.

Korollar zu Satz 38. *Die Komponenten von $\Lambda(f, J)$ sind mit den Intervallen $K(\infty, x_j)$, $x_j \in E_\Lambda(f, J)$ identisch.*

Denn nach Satz 38 ist $K(\infty, x_j) \leq \Lambda(f, J)$; es ist $K(\infty, x_j)$ also entweder eine Komponente von $\Lambda(f, J)$ oder ein Teil einer solchen Komponente. Der letztere Fall kann aber nicht eintreten: die beiden Randpunkte von $K(\infty, x_j)$ sind entweder Hauptpunkte oder aber Häufungspunkte der Randpunkte der Intervalle $K[n, s(n, x_j)]$, also Häufungspunkte von Hauptpunkten, und gehören daher nicht zu der offenen Menge $\Lambda(f, J)$.

Satz 39. *Die Menge $H(f, \bar{J}) \setminus S(f, \bar{J})$ der in $\bar{J}$ nicht erreichbaren Hauptpunkte ist abzählbar, und zwar ist*

(106) $$H(f, \bar{J}) \setminus S(f, \bar{J}) \leq \lambda(f, \bar{J}).$$

Beweis. Es ist

$$\bar{J} = S(f, \bar{J}) \cup E_p(f, J) \cup E_\Lambda(f, J).$$

Hierin enthält die Menge

$S(f, \bar{J})$ definitionsgemäß nur in $\bar{J}$ erreichbare Hauptpunkte,
$E_p(f, J)$ nach Satz 37 nur Restpunkte,
$E_\Lambda(f, J)$ nach Satz 38 nur Linearpunkte und Punkte aus $\lambda(f, J)$.

Daraus ergibt sich (106).

Korollar zu Satz 39. *Die Menge $H(f, \bar{J}) \setminus S(f, \bar{J})$ ist nirgends dicht auf $\bar{J}$.*

Denn $\lambda(f, \bar{J})$ ist nirgends dicht auf J.

Als Abschluß dieses Paragraphen geben wir noch ein Beispiel einer Funktion, welche zwei nicht erreichbare Hauptpunkte hat:

Beispiel. Das Definitionssegment sei $\bar{J} = [-2, +2]$. Wir setzen

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)^3 \text{ für } x \in [-2, -1] \\ f(x) &= 0 \qquad\quad \text{ für } x \in [-1, +1] \\ f(x) &= (x-1)^3 \text{ für } x \in [1, 2]. \end{aligned}$$

Hier ist der linke Endpunkt $x = -1$ der Komponente $(-1, +1)$ der Menge $\Lambda(f, J)$ ein Konkavpunkt, der rechte Endpunkt $x = 1$ ein Konvexpunkt; beide sind in $\bar{J}$ nicht erreichbar. Der Zusatz „in $\bar{J}$" ist notwendig; denn $x = -1$ ist beispielsweise im Segment $[-2, 0]$, und $x = +1$ im Segment $[0, +2]$ erreichbar.

§ 8. Die Struktur der Mengen $H(f, \bar{J})$ und $R(f, J)$.

Satz 40. *Die Menge $H(f, \bar{J})$ ist eine auf $\bar{J}$ vollkommene F_σ-Menge.*

Beweis. Die Menge $H(f, \bar{J})$ setzt sich zusammen aus der Menge $S(f, \bar{J})$, die nach Satz 34 eine vollkommene F_σ-Menge auf $\bar{J}$ ist, und der nach Satz 39 abzählbaren Menge $H(f, \bar{J}) \setminus S(f, \bar{J})$, also aus zwei F_σ-Mengen, von denen eine vollkommen auf $\bar{J}$ ist. Sie ist daher selbst eine auf $\bar{J}$ vollkommene F_σ-Menge.

Dem Struktursatz für $R(f, J)$ schicken wir zwei allgemeine Sätze über G_δ-Mengen voraus, die seinen Beweis wesentlich vereinfachen.

Satz 41. *Es sei in J eine abzählbare Menge $\{B_n\}$ von G_δ-Mengen gegeben ($n = 1, 2, \ldots$). Dann ist der Durchschnitt $B = \bigcap_n B_n$ wieder eine G_δ-Menge.*

Beweis. Jede der Mengen B_n ist definitionsgemäß der Durchschnitt von abzählbar vielen offenen Mengen $E_{n,m}$ (n fest; $m = 1, 2, \ldots$); es ist also $B_n = \bigcap_m E_{n,m}$, woraus

$$B = \bigcap_n \bigcap_m E_{n,m} = \bigcap_{n,m} E_{n,m}$$

folgt. Damit ist B als Durchschnitt der abzählbar vielen offenen Mengen $E_{n,m}$ ($n = 1, 2, \ldots$; $m = 1, 2, \ldots$) dargestellt, ist daher selbst eine G_δ-Menge.

Satz 42. *Eine G_δ-Menge $E \subset J$ enthalte eine offene Menge B. Dann ist auch $E \setminus B$ eine G_δ-Menge.*

Beweis. Die Menge B ist als offene Menge gleichzeitig eine F_σ-Menge; also die Menge $J \setminus B$ nach Satz 1 eine G_δ-Menge. Nun ist aber

$$E \setminus B = (J \setminus B) \cap E,$$

also der Durchschnitt zweier G_δ-Mengen; nach Satz 41 ist daher $E \setminus B$ selbst eine G_δ-Menge.

Nunmehr lassen wir den Struktursatz für $R(f, J)$ folgen:

Satz 43. *Die Menge $R(f, J)$ ist eine G_δ-Menge.*

Beweis. Nach (53) ist

$$\Lambda(f, J) \cup R(f, J) = \bar{J} \setminus H(f, \bar{J}),$$

auf Grund der Sätze 40 und 1 ist daher $\Lambda(f, J) \cup R(f, J)$ eine G_δ-Menge. Da aber $\Lambda(f, J)$ nach Satz 21 offen ist, folgt nun nach Satz 42 unmittelbar die Behauptung.

§ 9. Verallgemeinerung des zur Definition der Hauptpunkte höherer Stufen angewandten Verfahrens.

Das in § 5 eingeführte induktive Verfahren zur Definition der Hauptpunkte höherer Stufen in $\bar{J}$, das sich in den Formeln (79) und (80) ausdrückt, führt zum Ziel, wenn man es von der Menge $S_0(f, \bar{J}) = G(\bar{J})$ ausgehend, sukzessive anwendet; denn es ergibt sich auf diesem Wege aus $S_0(f, \bar{J})$ auch die Menge $S_1(f, \bar{J})$. Wir haben also das Verfahren für alle Werte $n \geqq 0$ benutzt.

Statt dessen kann man es auch erst von $n = 1$ an anwenden; man hat in diesem Falle die Möglichkeit, an Stelle der Menge $S_1(f, \bar{J})$ irgendeine andere auf $\bar{J}$ vollkommen abgeschlossene Menge erreichbarer Hauptpunkte zu setzen; wir wollen diese Menge mit $F_1(f, \bar{J})$ bezeichnen, und zwar wollen wir den Fall betrachten, daß $F_1 \leqq S_1$ ist, weil wir den allgemeinen Fall nicht benötigen werden. Setzen wir noch

$$F_0(f, \bar{J}) = S_0(f, \bar{J}), \tag{107a}$$

so sei also

$$F_0(f, \bar{J}) \leqq F_1(f, \bar{J}) \leqq S_1(f, \bar{J}), \tag{107b}$$

so daß F_1 auf $\bar{J}$ vollkommen abgeschlossen ist.

Nun wenden wir von $F_1(f, \bar{J})$ ausgehend, das induktive Verfahren des § 5 an und erhalten dadurch eine Folge $\{F_n(f, \bar{J})\}$ monoton nicht abnehmender, auf $\bar{J}$ vollkommen abgeschlossener Mengen von Hauptpunkten. Setzen wir noch

$$B_n(f, J) = \bar{J} \setminus F_n(f, \bar{J}) \tag{108a}$$

$$V_n(f, J) = F_n(f, \bar{J}) \setminus F_{n-1}(f, \bar{J}) \tag{108b}$$

$$F(f, \bar{J}) = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n(f, \bar{J}), \tag{108c}$$

so gelten alle Beziehungen und Sätze mit F_n, B_n, V_n, F an Stelle von S_n, E_n, H_n, S.

Wir beweisen darüber hinaus, daß jede so erhaltene Menge $F(f, \bar{J})$ mit der Menge $S(f, \bar{J})$ aller in $\bar{J}$ erreichbaren Hauptpunkte identisch ist. Wir stützen uns dabei auf den

Satz 44. *Es seien T_1 und Z_1 zwei auf $\bar{J}$ vollkommen abgeschlossene Mengen von Hauptpunkten der Funktion $f(x)$, und es sei $T_1 \leqq Z_1$. Sind dann T_2 und Z_2 die durch einmalige Anwendung des Induktionsverfahrens auf T_1 bzw. Z_1 hervorgegangenen auf $\bar{J}$ vollkommen abgeschlossenen Hauptpunktmengen, so ist $T_2 \leqq Z_2$.*

Beweis. Die Komponenten von $\bar{J} \setminus T_1$ seien X_n $(n = 1, 2, \ldots)$, die Komponenten von $\bar{J} \setminus Z_1$ seien Y_m $(m = 1, 2, \ldots)$. Wegen $T_1 \leqq Z_1$ besteht jede Komponente X_n, wenn sie nicht mit einer Komponente $Y_{m(n)}$ identisch ist, aus abzählbar vielen Komponenten Y_{n_r} $(r = 1, 2, \ldots)$ und aus Punkten der Menge Z_1. Im ersten Falle ist $S_1(f, \bar{X}_n) = S_1(f, \bar{Y}_{m(n)})$, im zweiten Falle erhalten wir aus (59c) leicht

$$S_1(f, \bar{X}_n) \leqq Z_1 \cup \left[\bigcup_r S_1(f, \bar{Y}_{n_r})\right],$$

und hieraus auf Grund der Induktionsformel (80) die Behauptung.

Satz 45. *Es ist*

$$F(f, \bar{J}) = S(f, \bar{J}).$$

Beweis. Nach (107b) ist $F_1(f, \bar{J}) \leqq S_1(f, \bar{J})$, woraus Satz 44 induktiv sofort $F_n(f, \bar{J}) \leqq S_n(f, \bar{J})$ für jeden Index n liefert. Wegen (84) und (108c) ist daher

$$F(f, \bar{J}) \leqq S(f, \bar{J}). \tag{109a}$$

Nach (107a) und (107b) ist andrerseits $S_0(f, \bar{J}) \leqq F_1(f, \bar{J})$, woraus Satz 44 induktiv $F_{n+1}(f, \bar{J}) \geqq S_n(f, \bar{J})$ für jeden Index n liefert. Nach (84) und (108c) ist daher

$$F(f, \bar{J}) \geqq S(f, \bar{J}). \tag{109b}$$

Mit (109a) und (109b) ist der Satz bewiesen.

Korollar zu Satz 45. *Für jede der betrachteten Mengenfolgen $\{F_n(f, J)\}$ ist*

$$S(f, \bar{J}) = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n(f, \bar{J}) \tag{110}$$

eine kanonische Summendarstellung der Menge $S(f, \bar{J})$.

§ 10. Die alternierende kanonische Summendarstellung der Menge $S(f, \bar{J})$.

Die allgemeinen Untersuchungen des vorhergehenden Paragraphen spezialisieren wir jetzt dahin, daß wir als Ausgangsmenge $F_1(f, \bar{J})$ die Menge $S_1^-(f, \bar{J})$ wählen, die durch (58a, b) definiert ist. Sie enthält die beiden Randpunkte von $\bar{J}$ und alle Konkavpunkte erster Stufe von $f(x)$ in J. Die in diesem Spezialfall auftretenden Mengen charakterisieren wir durch einen Stern. Es ist also

$$F_0^*(f, \bar{J}) = G(\bar{J}) \tag{110a}$$

$$F_1^*(f, J) = S_1^-(f, \bar{J}), \tag{110b}$$

woraus sich alle höheren Mengen $F_n^*(f, \bar{J})$ induktiv ergeben. Für $S(f, \bar{J})$ haben wir dann die kanonische Summendarstellung [17])

$$S(f, \bar{J}) = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n^*(f, \bar{J}), \tag{110c}$$

und analog (108a, b) setzen wir

$$B_n^*(f, J) = \bar{J} \setminus F_n^*(f, \bar{J}) \tag{110d}$$

$$V_{n+1}^*(f, J) = F_{n+1}^*(f, \bar{J}) \setminus F_n^*(f, \bar{J}). \tag{110e}$$

Insbesondere ist

$$V_1^*(f, J) = H_1^-(f, J) < H^-(f, J). \tag{110f}$$

Hieraus, aus (108b) und dem Satze 30 erhalten wir aber die Beziehung

$$V_2^*(f, J) < H^+(f, J); \tag{110g}$$

diese Schlußweise läßt sich fortsetzen, so daß allgemein

$$\bigcup_{r=1}^{\infty} V_{2r-1}^*(f, J) < H^-(f, J) \tag{111a}$$

$$\bigcup_{r=1}^{\infty} V_{2r}^*(f, J) < H^+(f, J) \tag{111b}$$

ist. Setzen wir nun in (110c) auf der rechten Seite für $n \geqq 1$ die Mengen V_n^* anstatt der Mengen F_n^*, was wir wegen (110e) dürfen, so erhalten wir

$$S(f, \bar{J}) = F_0^*(f, \bar{J}) \cup \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n^*(f, J)\right]. \tag{112}$$

[17]) Ist $H_1^-(f, J)$ leer, aber $H_1^+(f, J)$ nicht leer, so ist für $n = 0$ die Bedingung (6) nicht erfüllt, die Darstellung (110c) also nicht mehr streng kanonisch. Wenn wir sie trotzdem auch in diesem Falle noch kanonisch nennen, so deswegen, weil wenigstens für alle Werte $n \geqq 1$ die Bedingung (6) erfüllt ist.

Die Beziehungen (111a) und (111b) berechtigen uns damit zu der

Definition 15. Die Darstellung (112) der Mengen $S(f, \bar{J})$ nennen wir ihre *alternierende Summendarstellung*; die Darstellung (110c) ihre *alternierende kanonische Summendarstellung*.

(Bemerkung: Die analoge Festsetzung $F_1(f, \bar{J}) = S_1^+(f, \bar{J})$ ergibt ebenfalls eine alternierende Summendarstellung, die wir aber außer acht lassen, weil wir nur eine von beiden benötigen.)

§ 11. Die Kategoriezugehörigkeit der Mengen H^-, H^+, R.

Satz 46. *Ist die Menge $S(f, \bar{J})$ auf $\bar{J}$ zweiter Kategorie, so existiert mindestens ein Intervall $J_1 < J$, für welches entweder $J_1 < H^-(f, J)$ oder $J_1 < H^+(f, J)$ gilt.*

Beweis. Wenden wir Satz 8b auf (112) in Verbindung mit (110c) und (110e) an, so erhalten wir ein Intervall $J_N \leqq \bar{J}$, das in einer der Mengen $V_n^*(f, J)$ enthalten ist. Nach (111a) und (111b) ist daher entweder $J_N \leqq H^-(f, J)$ oder $J_N \leqq H^+(f, J)$.

Korollar zu Satz 46. *Die Behauptung des Satzes 46 bleibt richtig, wenn man in der Voraussetzung die Menge $S(f, \bar{J})$ durch $H(f, \bar{J})$ ersetzt.*

Denn beide Mengen unterscheiden sich nach Satz 39 nur um eine abzählbare Menge.

Satz 47. *Ist die Menge $R(f, J)$ dicht auf J, so ist sie eine Residualmenge. Außerdem ist $\Lambda(f, J)$ leer, während jede der beiden Mengen $H^-(f, J)$ und $H^+(f, J)$ auf J ebenfalls dicht, jedoch eine Menge erster Kategorie ist.*

Beweis. Die erste Behauptung ergibt sich aus den Sätzen 9 und 43; die folgenden Behauptungen sind schon im Korollar 2 zu Satz 28 enthalten. Daß schließlich jede der Mengen H^- und H^+ erster Kategorie auf J ist, ergibt sich daraus, daß ihre Vereinigung $H^- \cup H^+$ als Komplementärmenge der Residualmenge $R(f, J)$ erster Kategorie auf J ist.

Vierter Abschnitt.

Die Struktur der Funktionskurven stetiger Funktionen.

§ 1. Linearität, Einwendigkeit, Doppelwendigkeit.

Definition 16. Ist $J_1 \leqq J$, so heiße eine Funktion $f(x)$

a) in J_1 *rein linear*, wenn $\Lambda(f, J_1) = J_1$,
b) in J_1 *rein konkav*, wenn $H^-(f, J_1) = J_1$,
c) in J_1 *rein konvex*, wenn $H^+(f, J_1) = J_1$

ist.

Für diese drei Begriffe schaffen wir einen Oberbegriff.

Definition 17. Jede in J_1 rein lineare bzw. rein konkave bzw. rein konvexe Funktion heiße *in J_1 regulär*.

Und schließlich fassen wir noch b) und c) unter einem Oberbegriff zusammen:

Definition 18. Jede in J_1 rein konkave bzw. rein konvexe Funktion heiße *in J_1 einwendig*.

Nach dem Korollar zu Satz 27 können wir die Bedingung im Falle a) der Definition 16 durch die Bedingung, daß $J_1 \cap H(f, J)$ leer ist, ersetzen.

Die Bedingungen in den Fällen b) und c) aber können wir durch die (nur scheinbar einschränkenderen) Voraussetzungen des folgenden Satzes ersetzen:

Satz 48. *Eine Funktion $f(x)$ ist dann und nur dann einwendig auf J_1, wenn entweder $H_1^-(f, J_1) = J_1$ oder $H_1^+(f, J_1) = J_1$ ist.*

Beweis (für den konkaven Fall). 1. Es sei $H_1^-(f, J_1) = J_1$. Außerdem ist stets

$$H_1^-(f, J_1) \leqq H^-(f, J_1) \leqq J_1;$$

aus beiden Beziehungen ergibt sich $H^-(f, J_1) = J_1$.

2. Es sei $H^-(f, J_1) = J_1$, und es sei $x_i < x_j < x_k$ irgendein Punkttripel in $\bar{J}_1$. Wäre $Q(f; x_i, x_j, x_k) > 0$, so gäbe es nach dem Korollar 2 zu Satz 27 in J_1 einen Konvexpunkt von $f(x)$, im Widerspruch zu unserer Annahme. Wäre aber

$$Q(f; x_i, x_j, x_k) = 0, \tag{113a}$$

so gibt es wegen $x_j \in H^-(f, J)$ gemäß Definition 7 zwei Punkte x_m und x_n, die den Bedingungen

$$x_i < x_m < x_j < x_n < x_k \tag{113b}$$

genügen, und für welche

$$Q(f; x_m, x_j, x_n) < 0 \tag{113c}$$

ist. Wendet man (113a) bis (113c) auf die Identität (47) an, so ergibt sich, daß mindestens eine der beiden Diskriminanten $Q(f; x_i, x_m, x_j)$ oder $Q(f; x_j, x_n, x_k)$ positiv sein muß, was — wie wir schon sahen — unmöglich ist.

Definition 19. Eine Funktion $f(x)$ heiße im Intervall J_1 *abschnittweise* linear bzw. konkav bzw. konvex bzw. regulär bzw. einwendig, wenn jedes Intervall $J_2 \leqq J_1$ ein Teilintervall $J_3 \leqq J_2$ enthält, in welchem sie rein linear bzw. rein konkav bzw. rein konvex bzw. regulär bzw. einwendig ist.

Definition 20. Eine Funktion $f(x)$ heiße im Intervall J_1 *überall doppelwendig*, wenn sie in keinem Teilintervall von J_1 regulär ist.

§ 2. Die beiden Hauptstrukturen.

Wie schon in der Einleitung erwähnt, hängt die Gesamtstruktur der Funktion in einem Intervall mit der Verteilung ihrer Restpunkte in diesem Intervall eng zusammen.

Nun können wir das Definitionssegment $\bar{J}$ von $f(x)$ in zwei Haupttypen paarweise fremder Ausschnitte aufteilen (deren Komplementärmenge nirgends dicht auf $\bar{J}$ ist): in solche Ausschnitte, auf denen $R(f, J)$ nirgends dicht, und solche, auf denen $R(f, J)$ überall dicht ist. Für diese beiden Typen gelten zwei wesentlich verschiedene Struktursätze.

Satz 49. *Eine stetige Funktion $f(x)$ ist dann und nur dann auf J_1 abschnittweise regulär, wenn $R(f, J)$ auf J_1 nirgends dicht ist.*

Beweis. 1. Ist $f(x)$ in J_1 abschnittweise regulär, und ist $J_2 \leqq J_1$, so existiert nach den Definitionen 19, 17, 16 ein Intervall $J_3 \leqq J_2$, das zu einer der drei Mengen $H^-(f, J_1)$, $H^+(f, J_1)$, $\Lambda(f, J_1)$ gehört; aus Definition 8 folgt daher $J_3 < J_1 \setminus R(f, J_1)$.

2. Es sei $R(f, J_1)$ nirgends dicht auf J_1 und es sei $J_2 \leqq J_1$. Ist der Durchschnitt $J_2 \cap \Lambda(f, J_1)$ nicht leer, so enthält J_2 mindestens ein Teilintervall einer Komponente der offenen Menge $\Lambda(f, J_1)$, d. h. ein Regularitätsintervall von $f(x)$. Ist aber der genannte Durchschnitt leer, so ist die Menge $H(f, \bar{J}_1)$ auf J_2 komplementär zu der nirgends dichten Menge $R(f, J)$, also selbst zweiter Kategorie auf J_2. Damit liefert aber das Korollar zu Satz 46 ein Intervall $J_3 \leqq J_2$, in welchem $f(x)$ einwendig, also regulär ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Diesen Satz wenden wir auf die geometrische Gestalt der Funktionskurve an. Offensichtlich stellt jeder Linearitätsabschnitt einen primitiven Kurvenbogen erster Ordnung, jeder Einwendigkeitsabschnitt einen primitiven Kurvenbogen zweiter Ordnung dar. Damit erhalten wir die eine Aussage des Hauptschen Satzes in einer etwas anderen Fassung:

Korollar zu Satz 49. *Die Funktionskurve $y = f(x)$ besteht dann und nur dann im Intervall J_1 aus primitiven Bogen erster und zweiter Ordnung sowie deren Häufungspunkten, wenn die Restpunktmenge $R(f, J_1)$ auf J_1 nirgends dicht ist.*

Satz 50. *Eine stetige Funktion $f(x)$ ist dann und nur dann auf J_1 überall doppelwendig, wenn $R(f, J_1)$ auf J_1 überall dicht ist. Mit dieser Eigenschaft sind die folgenden Eigenschaften untrennbar verbunden:*

a) *$\Lambda(f, J_1)$ ist leer;*

b) *jede der beiden Mengen $H^-(f, J_1)$ und $H^+(f, J_1)$ ist auf J_1 dicht und von erster Kategorie;*

c) *$R(f, J_1)$ ist eine Residualmenge auf J_1.*

Beweis. Die Behauptungen a), b), c) sind schon in Satz 47 enthalten. Es sind daher nur noch die beiden ersten Behauptungen zu beweisen.

1. Es sei $f(x)$ in J_1 überall doppelwendig. Wäre in einem gewissen Intervall $J_2 \leqq J_1$ kein Punkt von $R(f, J_1)$ vorhanden, so wäre $f(x)$ nach dem vorhergehenden Satze auf J_2 abschnittweise regulär, im Widerspruch zu unserer Annahme.

2. Ist $R(f, J_1)$ überall dicht auf J_1 und ist $J_2 < J_1$, so ist J_2 kein Regularitätsintervall, da es Restpunkte enthält.

Damit ist der Satz bewiesen.

Nehmen wir die zweite Behauptung des Hauptschen Satzes hinzu (die wir hier nicht bewiesen haben), so erhalten wir das

Korollar zu Satz 50. *Die Funktionskurve $y = f(x)$ ist dann und nur dann im Intervall J_1 ein primitiver Bogen der Ordnung Unendlich, wenn die Restpunktmenge $R(f, J_1)$ auf J_1 überall dicht ist.*

Denn es existiert kein Regularitätsintervall in J_1; nach dem Hauptschen Satze zerfällt also in J_1 die Funktionskurve in primitive Bogen der Ordnung Unendlich „und deren Häufungspunkte". Nun ist aber die Menge aller Punkte der Ordnung Unendlich abgeschlossen, womit die Behauptung bewiesen ist.

§ 3. Die Differenzierbarkeit.

Jede in einem Intervall lineare Funktion ist überall in diesem Intervall differenzierbar, jede in einem Intervall einwendige Funktion ebenfalls überall differenzierbar, mit Ausnahme von abzählbar vielen Punkten [18]). Hieraus ergeben sich zwei Sätze:

Satz 51a. *Besitzt $f(x)$ in $\bar{J}$ einen Regularitätsabschnitt J_1, so ist $f(x)$ in J_1 bis auf eine abzählbare Ausnahmemenge differenzierbar.*

Satz 51b. *Ist $f(x)$ in $\bar{J}$ nirgends differenzierbar, so ist $f(x)$ in J überall doppelwendig.*

Nach dem Korollar zu Satz 50 erhalten wir hierzu

Korollar zu Satz 51b. *Zur Nichtdifferenzierbarkeit der Funktion $f(x)$ in J ist notwendig, daß die Restpunktmenge $R(f, J)$ in J überall dicht sei. Dabei ist dann $R(f, J)$ automatisch eine Residualmenge.*

[18]) Vgl. Haupt-Aumann-Pauc, Diff.- und Integr.-Rechnung II (2. Aufl.), Berlin 1950, p. 99, Satz 4.

Eingegangen am 11. Februar 1955.

Über relativ-zyklische Erweiterungen galoisscher Körper. *)

Von *Gudrun Beyer* in Hamburg.

Die Galoisgruppe $\mathfrak{g}$ des galoisschen Körpers Ω/Ω_0 sei homomorphes Bild der endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ mit zyklischem Kern $\mathfrak{A}$. Die Charakteristik von Ω gehe nicht in der Ordnung n von $\mathfrak{A}$ auf, und Ω enthalte die n-ten Einheitswurzeln. Ferner sei allem Folgenden ein fester Homomorphismus von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{g}$ zugrundegelegt.

Das *Erweiterungsproblem* $\mathfrak{E}$ (nach R. Brauer auch Einbettungsproblem genannt) für Ω/Ω_0 mit $\mathfrak{G}$ besteht darin, Ω zu einer galoisschen Algebra K/Ω_0 mit der Gruppe $\mathfrak{G}$ zu erweitern derart, daß Ω der Fixbereich von $\mathfrak{A}$ wird (d. h. die Gesamtheit der bei $\mathfrak{A}$ invarianten Elemente). Es handelt sich also darum, der Gruppenerweiterung $\mathfrak{G}$ eine Körper- (oder Algebren-)erweiterung K an die Seite zu stellen. K heißt auch *Erweiterungsalgebra von* Ω/Ω_0 (*im Sinne von* $\mathfrak{E}$).

Der Begriff der (kommutativen) *galoisschen Algebra* K ist dabei nach Teichmüller[1]) und Hasse [4] in leichter Verallgemeinerung des Begriffes „galoisscher Körper" wie folgt definiert: K ist eine kommutative halbeinfache Algebra, besitzt $\mathfrak{G}$ als Automorphismengruppe über Ω_0 und bezüglich $\mathfrak{G}$ eine Normalbasis über Ω_0, d. h. eine Basis, die aus den $\mathfrak{G}$-Konjugierten eines Elementes besteht.

Eine galoissche Algebra ist direkte Summe zueinander isomorpher und unter $\mathfrak{G}$ konjugierter galoisscher Körper. Ist $\mathfrak{G}$ abelsch, so spricht man von einer abelschen Algebra.

In dieser Form wurde das Erweiterungsproblem zuerst von Hasse [4] gestellt und mit einem Gleichungssystem (W) in Ω in Verbindung gebracht. $\mathfrak{E}$ ist nämlich genau dann lösbar, wenn es ein Elementsystem $\mathfrak{b}$ und ein Elementsystem $\mathfrak{c}$ in Ω mit der Eigenschaft

$$(W) \qquad \mathfrak{W}(\mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = 1$$

gibt. Die verschiedenen Lösungen $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ von (W) bestimmen die sämtlichen Lösungen des Erweiterungsproblems $\mathfrak{E}$, also die sämtlichen Erweiterungsalgebren im Sinne von $\mathfrak{E}$. Diejenigen Lösungen $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}$, die dieselbe Erweiterungsalgebra bestimmen („assoziierte" Lösungen [4]), werden durch eine gewisse Gruppe $\mathfrak{a}$ von Transformationen transitiv permutiert. Durch diese Gruppe $\mathfrak{a}$ werden darüber hinaus die sämtlichen Lösungen $\mathfrak{b}$ eines gewissen Teilsystems

$$(V) \qquad \mathfrak{B}(\mathfrak{b}) = 1$$

transitiv permutiert. Hasse vermutete, daß die Existenz einer Lösung von (V) bereits die Lösbarkeit von (W) garantiert. Diese Vermutung trifft i. a. nicht zu, wie Faddeev [2] durch ein Gegenbeispiel gezeigt hat.

---

*) Umgearbeitete Fassung von Teil I meiner Dissertation (Hamburg 1955).

[1]) Von diesem 1936 unter dem Namen „Normalring" eingeführt.

Hier sollen Erweiterungen

$$(\hat{W}) \qquad \hat{\mathfrak{W}}(\mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = 1,$$

$$(\hat{V}) \qquad \hat{\mathfrak{B}}(\mathfrak{b}) = 1$$

der genannten Gleichungssysteme und eine Untergruppe $\hat{\mathfrak{a}}$ von $\mathfrak{a}$ derart angegeben werden, daß die darauf übertragenen obigen Aussagen richtig sind und daß darüber hinaus die Existenz einer Lösung von $(\hat{V})$ bereits die Lösbarkeit von $(\hat{W})$ garantiert. Die Lösbarkeit des Erweiterungsproblems $\mathfrak{E}$ ist also gleichbedeutend mit der Lösbarkeit von $(\hat{V})$.

Dabei besteht $(\hat{W})$ aus (W) und $(\hat{V})$:

$$(\hat{W}) \qquad \mathfrak{W}(\mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = 1, \quad \hat{\mathfrak{B}}(\mathfrak{b}) = 1.$$

Die Aufgabe zerfällt demnach in zwei Teilaufgaben. Einerseits ist zu zeigen, daß es in jeder Klasse assoziierter Lösungen $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ von (W) eine solche mit der Eigenschaft $\hat{\mathfrak{B}}(\mathfrak{b}) = 1$ gibt. Diese Aufgabe ist leicht zu lösen. Andererseits ist zu zeigen, daß aus der Existenz einer Lösung $\hat{\mathfrak{b}}$ von $(\hat{V})$ die Lösbarkeit von (W) folgt. Diese Aufgabe, auf der das Schwergewicht der Arbeit liegt, wird dadurch gelöst, daß aus $\hat{\mathfrak{b}}$ eine Lösung $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ von (W) multiplikativ zusammengesetzt wird. Die Gruppe $\hat{\mathfrak{a}}$ schließlich ergibt sich einfach als die größte Untergruppe von $\mathfrak{a}$, die die Lösungen von $(\hat{V})$ untereinander permutiert.

Wenn speziell $\mathfrak{A}$ ungerade Ordnung hat, so kann nach einem Satz von Speiser (Verallgemeinerung von Hilberts Satz 90) aus der Lösbarkeit von (V) auf die Lösbarkeit von $(\hat{V})$ geschlossen werden, so daß in diesem Falle die Vermutung von Hasse bestätigt ist[2]). Wenn dagegen $\mathfrak{A}$ gerade Ordnung hat, so trifft nach Faddeev diese Vermutung nicht immer zu, so daß i. a. die Lösbarkeit von $(\hat{V})$ eine echte Verschärfung der Lösbarkeit von (V) bedeutet.

Herrn Professor Hasse verdanke ich die Anregung zu dieser Arbeit und wesentliche Hilfe bei der Umarbeitung meines ursprünglichen Textes.

Bezeichnungen. Wenn nichts anderes gesagt, durchlaufe

S, T, T'	die	Elemente	von $\mathfrak{G}$
A	„	„	„ $\mathfrak{A}$
U, U'	„	„	der (jeweils geeignet definierten) Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}$
R, R'	„	„	der (jeweils geeignet definierten) Teilmenge $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{G}$
χ, χ', χ''	„	„	der Charaktergruppe X von $\mathfrak{A}$
φ	„	„	der in § 2 mit „Grundklasse" bezeichneten Teilmenge von X.

φ sei ein erzeugendes Element der zyklischen Gruppe X, also von der Ordnung n. Wenn $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots, S_1, S_2, \ldots$ spezielle Teilmengen bzw. Elemente von $\mathfrak{G}$ sind, so bedeutet $\{\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots, S_1, S_2, \ldots\}$ ihr Erzeugnis. a, b, c, q bezeichnen stets von Null verschiedene Elemente von Ω.

Zugrundegelegt wird, wie schon gesagt, ein fester Homomorphismus von $\mathfrak{G}$ auf die Galoisgruppe $\mathfrak{g}$ von Ω/Ω_0. Die Anwendung der Galois-Automorphismen von Ω/Ω_0 auf die Elemente von Ω wird, diesem Homomorphismus entsprechend, mit den Elementen aus $\mathfrak{G}$ bezeichnet:

$$a \to a^S \quad (a \text{ aus } \Omega).$$

[2]) Für den Fall, daß neben $\mathfrak{A}$ auch $\mathfrak{g}$ zyklisch ist, habe ich Hasses Vermutung schon früher bewiesen; siehe Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **19**, 127—133 (1955). Die Lösbarkeit von (V) läßt sich dann einfach als Normbedingung für gewisse Einheitswurzeln ausdrücken.

Die Fixgruppe von Ω ist in dieser Bezeichnung $\mathfrak{A}$. Für die Automorphismen S einer Erweiterungsalgebra K/Ω_0 wird ebenfalls die Exponentenschreibweise benutzt:

$$\varkappa \to \varkappa^S \qquad (\varkappa \text{ aus } \mathsf{K}),$$

analog bei jeder vorkommenden galoisschen Algebra.

Die absolut irreduziblen Charaktere χ von $\mathfrak{A}$ sind als Funktionen von $\mathfrak{A}$ in Ω auffaßbar, da Ω die n-ten Einheitswurzeln enthält. Insbesondere bedeutet dann

$$\chi(A) \to \chi^S(A)$$

die Anwendung des Körperautomorphismus S auf den Charakterwert $\chi(A)$.

Mit dem Exponenten S werden auch die inneren Automorphismen von $\mathfrak{G}$ bezeichnet, bei denen durchweg $\mathfrak{A}$ als Normalteiler zulässig ist:

$$T^S = S^{-1}TS, \text{ insbesondere } A^S = S^{-1}AS \text{ in } \mathfrak{A}.$$

1 bedeutet das Einselement der jeweils betrachteten Gruppe oder des betrachteten Ringes; insbesondere besagt etwa $\mathfrak{g} = 1$, daß die Gruppe $\mathfrak{g}$ nur aus dem Einselement besteht.

§ 1. Erweiterungsalgebren und ihre Verkettungssysteme.

Die über Ω mit der Gruppe $\mathfrak{A}$ abelschen Algebren K werden nach Hasse [4] in der folgenden Weise durch Bestimmungsstücke in Ω charakterisiert. Da eine solche Algebra bezüglich $\mathfrak{A}$ eine Normalbasis über Ω besitzt, liefert sie als Darstellungsmodul für $\mathfrak{A}$ über Ω die reguläre Darstellung. Wegen der Einheitswurzelvoraussetzung für Ω zerfällt diese in die absolut irreduziblen Charaktere χ. Deshalb besitzt K/Ω eine Basis ω_χ (*Faktorbasis*) mit

$$(\mathfrak{A}) \qquad \omega_\chi^A = \chi(A)\,\omega_\chi.$$

Die ω_χ sind regulär, da die $\omega_\chi^n \neq 0$ als Elemente von Ω regulär sind. Deshalb ist jedes ω_χ durch die Eigenschaft $(\mathfrak{A})$ bis auf einen Faktor a_χ aus Ω eindeutig bestimmt. Hieraus folgen Relationen

$$\omega_\chi \omega_{\chi'} = \omega_{\chi\chi'}\, c_{\chi,\chi'}, \qquad c_{\chi,\chi'} \text{ aus } \Omega.$$

Für das so definierte *Faktorensystem* $c_{\chi,\chi'}$ der Algebra K hat dies die Assoziativ- und Kommutativrelationen zur Folge:

$$c_{\chi\chi',\chi''}\, c_{\chi,\chi'} = c_{\chi,\chi'\chi''}\, c_{\chi',\chi''}, \qquad c_{\chi,\chi'} = c_{\chi',\chi}.$$

Umgekehrt ist jede Lösung dieser Gleichungen, d. h. jedes kommutative Faktorensystem für X in Ω, Faktorensystem einer, vermöge $(\mathfrak{A})$ bis auf $\mathfrak{A}$-Isomorphie eindeutig bestimmten, galoisschen Algebra K/Ω mit der Gruppe $\mathfrak{A}$. Dabei entsprechen assoziierten Faktorensystemen

$$c_{\chi,\chi'} \quad \text{und} \quad \frac{a_\chi a_{\chi'}}{a_{\chi\chi'}}\, c_{\chi,\chi'} \quad \text{mit} \quad a_\chi \text{ aus } \Omega,$$

und nur solchen, einander $\mathfrak{A}$-isomorphe Algebren. Die Klasse assoziierter Faktorensysteme ist also ein kennzeichnendes Merkmal für K.

Unter den abelschen Algebren K/Ω mit der Gruppe $\mathfrak{A}$ sind diejenigen, die über Ω_0 mit der Gruppe $\mathfrak{G}$ galoissch sind, nach Hasse [4] in der folgenden Weise ausgezeichnet. Ist K/Ω_0 galoissch mit $\mathfrak{G}$, so gibt es, weil jedes ω_χ durch $(\mathfrak{A})$ bis auf einen Faktor aus Ω eindeutig bestimmt ist, ein System $b_{\chi,S}$ aus Ω, genannt *Verkettungssystem für* K, mit

$$(\mathfrak{G}) \qquad \omega_\chi^S = \omega_{\chi S}\, b_{\chi S, S},$$

wobei $\chi \to \chi_S$ den durch

$$(\Gamma) \qquad \chi_S(A) = \chi^S(A^{S^{-1}})$$

definierten Automorphismus der Charaktergruppe X bedeutet. Mit der einfachen Bezeichnung

$$a_\chi^{[S]} = a^S_{\chi_{S^{-1}}}$$

für Elementsysteme a_χ aus Ω oder auch aus K, die später sinngemäß auf Systeme mit mehrfacher Indizierung übertragen wird, also

$$a^{[S]}_{\chi,\chi'} = a^S_{\chi_{S^{-1}},\chi'_{S^{-1}}}, \quad a^{[S]}_{\chi,T} = a^S_{\chi_{S^{-1}},T},$$

schreiben sich die Gleichungen $(\mathfrak{G})$ in der Form $\omega_\chi^{[S]} = \omega_\chi b_{\chi,S}$. Aus den Gleichungen

$$(\overline{\mathfrak{G}}) \qquad \omega_\chi^{ST} = (\omega_\chi^S)^T \quad \text{und} \quad (\omega_\chi\omega_{\chi'})^S = \omega_\chi^S\omega_{\chi'}^S,$$

die mit der neuen Schreibweise auch $\omega_\chi^{[ST]} = (\omega_\chi^{[S]})^{[T]}$, $(\omega_\chi\omega_{\chi'})^{[S]} = \omega_\chi^{[S]}\omega_{\chi'}^{[S]}$ lauten, folgen für das Verkettungssystem Relationen[3]), die mit den Assoziativ- und Kommutativrelationen der $c_{\chi,\chi'}$ zusammengefaßt seien zu:

$$(W) \quad \begin{cases} c_{\chi\chi',\chi''}c_{\chi,\chi'} = c_{\chi,\chi'\chi''}c_{\chi',\chi''}, \quad c_{\chi,\chi'} = c_{\chi',\chi}; \\ (V)\ b_{\chi,ST} = b^{[T]}_{\chi,S}b_{\chi,T}; \quad b_{\chi,A} = \chi(A) \quad (\textit{erste Verkettungsgleichungen}); \\ b_{\chi,S}b_{\chi',S}b^{-1}_{\chi\chi',S} = c^{[S]-1}_{\chi,\chi'} \quad (\textit{zweite Verkettungsgleichungen}). \end{cases}$$

Ist umgekehrt K/Ω irgendeine mit $\mathfrak{A}$ abelsche Algebra und gibt es zu irgendeinem Faktorensystem von K eine Lösung $b_{\chi,S}$ von (W), so gilt $(\overline{\mathfrak{G}})$ bei der Definition $(\mathfrak{G})$, und man kann zeigen, daß K/Ω_0 galoissch mit $\mathfrak{G}$ ist [4].

Unter allen mit $\mathfrak{A}$ abelschen Algebren K/Ω sind also die Lösungen des Erweiterungsproblems $\mathfrak{E}$ dadurch ausgezeichnet, daß sie zu einem Faktorensystem $c_{\chi,\chi'}$ ein Verkettungssystem $b_{\chi,S}$ gemäß (W) besitzen. Die zu den verschiedenen Faktorbasen ω_χ (bzw. Faktorensystemen $c_{\chi,\chi'}$) gehörigen Verkettungssysteme

$$b_{\chi,S} \quad \text{und} \quad a_\chi^{[S]-1}b_{\chi,S} \qquad (a_\chi \text{ aus } \Omega)$$

heißen *assoziiert*.

Die Lösung des Erweiterungsproblems $\mathfrak{E}$ ist demnach äquivalent mit der Lösung der Gleichungen (W) in Ω. Diese recht komplizierten Gleichungssysteme lassen sich nach Hasse [3] noch weitgehend reduzieren, indem vor allem die Assoziativrelationen eliminiert werden. Die Bezeichnung wird wegen der hier gemachten Voraussetzung, daß $\mathfrak{A}$ zyklisch ist, besonders einfach.

Die durch die Gleichungen (Γ) definierten Automorphismen $\chi \to \chi_S$ der zyklischen Gruppe X bilden eine zu $\mathfrak{g}$ homomorphe Gruppe Γ, die vermöge der Festsetzung

$$\chi_{S^{-1}} = \chi^\sigma, \quad \text{also} \quad \chi^\sigma(A) = \chi_{S^{-1}}(A) = \chi^{S^{-1}}(A^S)$$

isomorph durch prime Restklassen σ mod n dargestellt und mit dieser Darstellung identifiziert werden möge. Für Restklassen ν mod n bedeute

$\mathfrak{r}(\nu)$ den Rest aus einem festen Restsystem $\mathfrak{r}$ | mod n, das die 1 enthalten soll (also $\mathfrak{r}(1) = 1$),

$$\mathfrak{a}(\mu, \nu) = \frac{\mathfrak{r}(\mu) + \mathfrak{r}(\nu) - \mathfrak{r}(\mu + \nu)}{n} \quad \text{(additive Übertragungszahl bei } \mathfrak{r}),$$

$$\mathfrak{m}(\mu, \nu) = \frac{\mathfrak{r}(\mu)\,\mathfrak{r}(\nu) - \mathfrak{r}(\mu\nu)}{n} \quad \text{(multiplikative Übertragungszahl bei } \mathfrak{r}),$$

---

[3]) Gegenüber [3], [4] sind diese Relationen dadurch vereinfacht, daß der zweite Index von $b_{\chi,S}$ die Elemente von $\mathfrak{G}$ und nicht von $\mathfrak{g}$ durchläuft. Diese Vereinfachung geht auf *Delone-Faddeev* [1] und *Witt* (Zentralblattreferat zu [3]) zurück. Im Verlauf der vorliegenden Arbeit wird dadurch das Rechnen mit den Assoziativrelationen für Faktorensysteme der Erweiterung $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{A}$ ersetzt durch das assoziative Rechnen in $\mathfrak{G}$ selbst.

sowie später

$$\mathfrak{m}^{\alpha}(\nu) = \frac{\mathfrak{r}(\nu)^{\alpha} - \mathfrak{r}(\nu^{\alpha})}{n} \quad \text{(Übertragungszahl zur } \alpha\text{-Potenzierung bei } \mathfrak{r},\ \alpha \geqq 0).$$

Die Automorphieoperatoren S von Ω werden mit den Γ zugeordneten Potenzoperatoren $\mathfrak{r}(\sigma)$ zu den Produktoperatoren

$$\bar{S} = S\mathfrak{r}(\sigma), \quad \text{also} \quad \chi^{\bar{S}}(A) = \chi(A^{S}),$$

vereinigt.

Nun werde für alles Folgende ein festes erzeugendes Element von X, der *Grundcharakter* φ, ausgewählt. Eine Erweiterungsalgebra K/Ω_0 von Ω/Ω_0 besitzt dann offenbar eine der Kummer-Erzeugung $\mathsf{K} = \Omega(\omega)$ mit dem Radikanden $\omega^n = c$ (in Ω) entsprechende Faktorbasis von der folgenden Form:

$$\omega_{\varphi^{\nu}} = \omega^{\mathfrak{r}(\nu)} \qquad \text{(insbesondere } \omega = \omega_{\varphi}).$$

Eine solche heiße eine *normierte Faktorbasis*. Ihr entspricht ein *normiertes Verkettungssystem* $b_{\varphi^{\nu},S}$ und ein *normiertes Faktorensystem* $c_{\varphi^{\mu},\varphi^{\nu}}$. Diese sind unter allen assoziierten Verkettungssystemen und Faktorensystemen dadurch ausgezeichnet, daß sie sich aus den *Grundverkettungsfaktoren* $b_S = b_{\varphi,S}$ und dem *Grundfaktor* (= Radikand = Potenzfaktor) $c = \prod_{\nu \bmod n} c_{\varphi,\varphi^{\nu}}$ aufbauen vermöge der *Normierungsrelationen*

$$(B) \qquad b_{\varphi^{\nu},S} = b_S^{\mathfrak{r}(\nu)} c^{-S\mathfrak{m}(\sigma,\nu)}$$

$$(C) \qquad c_{\varphi^{\mu},\varphi^{\nu}} = c^{\mathfrak{a}(\mu,\nu)}.$$

Grundverkettungsfaktoren b_S und Grundfaktor c genügen den *Grundverkettungsgleichungen*

$$(G) \qquad \begin{cases} (1) \quad b_{ST} = b_S^{\bar{T}} b_T c^{-ST\mathfrak{m}(\sigma,\tau)}, \quad b_A = \varphi(A) \\ (2) \quad b_S^n = c^{\bar{S}-1}. \end{cases}$$

Umgekehrt ist jedes Element c von Ω Grundfaktor einer über Ω mit $\mathfrak{A}$ abelschen Algebra, und jede Lösung b_S der Grundverkettungsgleichungen bildet die Grundverkettungsfaktoren eines zugehörigen normierten Verkettungssystems.

Zusammengefaßt, ergibt sich als Charakterisierung derjenigen über Ω mit $\mathfrak{A}$ abelschen Algebren, die über Ω_0 mit $\mathfrak{G}$ galoissch sind (Hasse [3]):

Satz 1. *Die über Ω mit der Gruppe $\mathfrak{A}$ abelsche Algebra K, die das Faktorensystem $c_{\chi,\chi'}$ oder den Grundfaktor c besitzt, ist dann und nur dann eine Erweiterungsalgebra von Ω/Ω_0 im Sinne des gestellten Problems $\mathfrak{E}$, wenn sie eine der beiden folgenden, einander äquivalenten, Bedingungen erfüllt:*

a) *K besitzt ein Verkettungssystem $b_{\chi,S}$ in Ω, d. h. eine Lösung der Gleichungen (W).*

b) *Die zu c gehörigen Grundverkettungsgleichungen (G) sind lösbar.*

Eine weitere Reduktion der Bedingung b) enthält der folgende

Satz 1'. *Sind bei einer Lösung b_S, c von (1) die Gleichungen (2) nur für ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{G}$ erfüllt, so gelten die Gleichungen (2) auch in der vollen Gruppe $\mathfrak{G}$.*

Beweis. Aus $b_S^n = c^{\bar{S}-1}$, $b_T^n = c^{\bar{T}-1}$ und $b_{ST} = b_S^{\bar{T}} b_T c^{-ST\mathfrak{m}(\sigma,\tau)}$ folgt $b_{ST}^n = c^{\overline{ST}-1}$ vermöge der Relation

$$\overline{ST} - 1 = \bar{S}\bar{T} - 1 - nST\mathfrak{m}(\sigma,\tau) = (\bar{S} - 1)\,\bar{T} + (\bar{T} - 1) - nST\mathfrak{m}(\sigma,\tau).$$

§ 2. Verkettungssysteme des Erweiterungsproblems $\mathfrak{E}$.

Die Verkettungsgleichungen enthalten nur im zweiten Teilsystem das Faktorensystem $c_{\chi,\chi'}$ von K. Deshalb hat Hasse [4] die ersten Verkettungsgleichungen (V) gesondert untersucht und eine Lösung $b_{\chi,S}$ von (V) als *Verkettungssystem für* $\mathfrak{E}$ bezeichnet. Wie in § 1 heißen zwei Verkettungssysteme der Form $b_{\chi,S}$ und $a_\chi^{[S]-1} b_{\chi,S}$ *assoziiert*, und es hat sich gezeigt, daß alle Verkettungssysteme für $\mathfrak{E}$ zueinander assoziiert sind [3, 4]. Die Existenz eines Verkettungssystems für $\mathfrak{E}$ ist sicherlich notwendig für die Lösbarkeit des Erweiterungsproblems. Umgekehrt hat Hasse [4] die *Vermutung* (V.) ausgesprochen, daß diese Bedingung auch hinreicht. Daß diese Vermutung widerlegt werden konnte [2], ist, wie sich im Verlauf dieser Arbeit zeigen wird, darauf zurückzuführen, daß sich ein Verkettungssystem $b_{\chi,S}$ für $\mathfrak{E}$ nicht immer durch Übergang zu Assoziierten im Sinne der Gleichungen (B) normieren läßt. Dabei kann man sich, wie ebenfalls noch zu zeigen ist, auf diejenigen unter den Normierungsrelationen (B) beschränken, in denen c gar nicht auftritt, für die also

$$\mathfrak{m}(\sigma, \nu) = 0 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{r}(\sigma)\,\mathfrak{r}(\nu) = \mathfrak{r}(\sigma\nu)$$

gilt. Dies ist z. B. der Fall für $\mathfrak{r}(\sigma) = 1$, d. h. für $\varphi_S = \varphi$. Dadurch wird die Aufmerksamkeit zunächst auf die *Fixgruppe* von φ gelenkt, d. h. auf die Untergruppe aller S aus $\mathfrak{G}$ mit $\varphi_S = \varphi$.

Bevor dieser Gedanke weiter verfolgt wird, sollen im Anschluß an Hasse [4] die ersten Verkettungsgleichungen (V) näher untersucht werden. Um den Zusammenhang mit dem Zerfall einfacher Algebren zu umgehen, soll die dort aus diesem Zusammenhang abgeleitete Reduktion der Gleichungen (V) hier auf einem elementaren Wege durchgeführt werden. Diese Gleichungen zerfallen nämlich in der folgenden Weise in voneinander unabhängige Teilsysteme.

Es durchlaufe $\mathfrak{K}$ die Klassen durch Γ konjugierter Charaktere aus X, kurz die Γ-Klassen von X:

$$\mathsf{X} = \bigcup_{\mathfrak{K}} \mathfrak{K}.$$

ξ sei ein Vertreter der Klasse $\mathfrak{K}$ und R durchlaufe ein Rechtsvertretersystem von $\mathfrak{G}$ nach der Fixgruppe $\mathfrak{U}$ von ξ:

$$\mathfrak{G} = \bigcup_R R\mathfrak{U} = \bigcup_R \mathfrak{U}R^{-1},$$

so daß also $\mathfrak{K}$ aus den verschiedenen Charakteren $\chi = \xi_{R^{-1}} = \xi^\varrho$ besteht.

Die ersten Verkettungsgleichungen (V) zerfallen dann nach den Γ-Klassen $\mathfrak{K}$ von X in voneinander unabhängige Teilsysteme

$$(V_{\mathfrak{K}}) \qquad b_{\chi,ST} = b_{\chi,S}^{[T]} b_{\chi,T}, \quad b_{\chi,A} = \chi(A), \quad \text{für } \chi \text{ aus } \mathfrak{K},$$

und das Teilsystem von $(V_{\mathfrak{K}})$ mit S, T aus $\mathfrak{U}$ bezieht sich nur auf den einen Charakter ξ, Es ist naheliegend, die folgende Aussage zu vermuten:

Satz 2 (Hasse [4]). *Seien $\mathfrak{K}$ die Klasse und $\mathfrak{U}$ die Fixgruppe eines Charakters ξ, und R durchlaufe ein Rechtsvertretersystem $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{U}$. Eine Lösung $b_{\xi,U}$ von*

$$(V_\xi^{\mathfrak{U}}) \qquad b_{\xi,UU'} = b_{\xi,U}^{U'} b_{\xi,U'}, \quad b_{\xi,A} = \xi(A)$$

läßt sich bei willkürlich gegebenen $b_{\xi,R}$ (R nicht aus $\mathfrak{U}$) auf eine und nur eine Weise zu einer Lösung $b_{\xi^\varrho,S}$ von $(V_{\mathfrak{K}})$ ausbauen, nämlich vermöge

$$(V_\xi^{\mathfrak{K}}) \qquad \begin{cases} (V_\xi^{\mathfrak{K},\mathfrak{U}}) & b_{\xi,RU} = b_{\xi,R}^{U} b_{\xi,U} \quad (\textit{Festlegung der } b_{\xi,S}) \\ (V_\xi^{\mathfrak{G},\mathfrak{K}}) & b_{\xi,SR} = b_{\xi,S}^{[R]} b_{\xi,R} \quad (\textit{Festlegung der } b_{\xi^\varrho,S}). \end{cases}$$

Zum Beweis werde im Hinblick auf die Gleichungen (V) die folgende, auch weiterhin häufig benutzte Schreibweise eingeführt:

$$V_{\chi}^{S,T}(a) \equiv a_{\chi,ST}^{-1} a_{\chi,S}^{[T]} a_{\chi,T} \quad \text{für ein beliebiges System } a_{\chi,S} \text{ aus } \Omega.$$

Bei Relationen zwischen solchen Ausdrücken, die identisch in den $a_{\chi,S}$ gelten, wird das Argument a weggelassen. Es gilt z. B.

$$V_{\chi}^{ST,T'}(V_{\chi}^{S,T})^{[T']} \equiv V_{\chi}^{S,TT'} V_{\chi}^{T,T'}.$$

Zu beweisen ist dann, daß ein den Gleichungen

$$V_{\xi}^{U,U'}(b) = 1, \quad V_{\xi}^{R,U}(b) = 1, \quad V_{\xi}^{S,R}(b) = 1$$

genügendes System $b_{\chi,S}$ notwendig den sämtlichen Gleichungen

$$V_{\xi^{\varrho}}^{S,T}(b) = 1$$

genügt. Das gelingt mit Hilfe der genannten Relation zwischen den V in den folgenden aufsteigenden Schritten:

$$\begin{aligned}
V_{\xi}^{S,U}(b) = 1 \quad &\text{wegen} \quad V_{\xi}^{RU,U'}(V_{\xi}^{R,U})^{U'} \equiv V_{\xi}^{R,UU'} V_{\xi}^{U,U'}\\
V_{\xi}^{S,T}(b) = 1 \quad &\text{wegen} \quad V_{\xi}^{S,RU} V_{\xi}^{R,U} \equiv V_{\xi}^{SR,U}(V_{\xi}^{S,R})^{U}\\
V_{\xi^{\varrho}}^{S,T}(b) = 1 \quad &\text{wegen} \quad (V_{\xi}^{S,T})^{[R]} V_{\xi}^{ST,R} \equiv V_{\xi}^{S,TR} V_{\xi}^{T,R}.
\end{aligned}$$

Damit ist Satz 2 bewiesen.

Dieser Satz interessiert insbesondere für den Grundcharakter φ. Deshalb bezeichne $\mathfrak{U}$ im folgenden nur noch die Fixgruppe von φ, die Normalteiler in $\mathfrak{G}$ ist, und ψ durchlaufe stets die Γ-Klasse des Grundcharakters φ, die *Grundklasse* $\mathfrak{K}$. Eine Lösung $b_{\psi,S}$ von $(V_{\mathfrak{K}})$, ein *Verkettungssystem zur Grundklasse*, soll *zu c normiert* heißen (wo c irgendein Element aus Ω ist), wenn es den Normierungsrelationen zur Grundklasse

$$(N) \qquad b_{\varphi,S}^{[T]} = \bar{b}_S^{\bar{T}} c^{-ST\mathfrak{m}(\sigma,\tau)}$$

genügt. Jede solche Normierungsrelation ist, unter Voraussetzung der ersten Verkettungsgleichungen $(V_{\mathfrak{K}})$, mit der entsprechenden Grundverkettungsgleichung äquivalent. Da im folgenden mit diesen Gleichungen sehr viel gerechnet werden muß, sei für beliebige Systeme $a_{\psi,S}$ (oder $a_{\chi,S}$) aus Ω und beliebige c aus Ω zur Abkürzung gesetzt:

$$\begin{aligned}
a_S &= a_{\varphi,S} \quad \text{die } \textit{Grundelemente} \text{ des Systems } a_{\psi,S},\\
N_c^{S,T}(a) &\equiv a_{\varphi,S}^{-[T]} a_S^{\bar{T}} c^{-ST\mathfrak{m}(\sigma,\tau)}\\
G_c^{S,T}(a) &\equiv a_{ST}^{-1} a_S^{\bar{T}} a_T c^{-ST\mathfrak{m}(\sigma,\tau)},
\end{aligned}$$

wobei der Index c für $\mathfrak{m}(\sigma, \tau) = 0$ weggelassen werden kann, also z. B.

$$N^{U,T}(a) \equiv a_{\varphi,U}^{-[T]} a_U^{\bar{T}}, \quad G^{U,T}(a) \equiv a_{UT}^{-1} a_U^{\bar{T}} a_T,$$

und wobei die Abkürzung a_S für $a_{\varphi,S}$ nicht benutzt werden soll, wenn auf dieses Element der Operator $[T]$ anzuwenden ist, weil

$$a_{\varphi,S}^{[T]} = a_{\varphi^{\tau},S}^{T}$$

i. a. nicht mehr ein Grundelement von $a_{\psi,S}$ ist. Später werde die Bezeichnung $G_c^{S,T}(a)$ auch für beliebige Systeme a_S aus Ω benutzt.

Äquivalenzsatz. *Unter Voraussetzung der ersten Verkettungsgleichungen $(V_{\mathfrak{K}})$ zur Grundklasse $\mathfrak{K}$ ist (bei beliebigem c aus Ω) die einzelne Normierungsrelation*

$$N_c^{S,T}(b) \equiv b_{\varphi,S}^{-[T]} b_S^{\bar{T}} c^{-ST\mathfrak{m}(\sigma,\tau)} = 1$$

äquivalent mit der entsprechenden Grundverkettungsgleichung

$$G_c^{S,T}(b) \equiv b_{ST}^{-1} b_S^{\bar{T}} b_T c^{-ST\mathfrak{m}(\sigma,\tau)} = 1.$$

Es gilt nämlich allgemein

$$V_\varphi^{S,T} N_c^{S,T} \equiv G_c^{S,T}.$$

Ersichtlich gilt die gleiche Äquivalenz für jede multiplikative Kombination von Normierungsrelationen und die entsprechende Kombination von Grundverkettungsgleichungen.

Die Bedingungen für ein normiertes Verkettungssystem zur Grundklasse lassen sich ferner wie folgt reduzieren:

Satz 3. *Ein Verkettungssystem $b_{\psi,S}$ zur Grundklasse $\mathfrak{K}$ ist zu c normiert, wenn nur die speziellen Normierungsrelationen*

$$(N^{\mathfrak{U},\mathfrak{R}}) \qquad N^{U,R}(b) \equiv b_{\varphi,U}^{-[R]} b_U^{\bar{R}} = 1$$

$$(N^{\mathfrak{R}}) \qquad N_c^{R,R'}(b) \equiv b_{\varphi,R}^{-[R']} b_R^{\overline{R'}} c^{-RR'\mathfrak{m}(\varrho,\varrho')} = 1$$

für den Fixnormalteiler $\mathfrak{U}$ von φ und ein Vertretersystem $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{G}/\mathfrak{U}$ erfüllt sind.

Beweis. Die Relation $N_c^{RU,R'}(b) = 1$ ergibt sich aus der Identität

$$N_c^{RU,R'}(V_\varphi^{R,U})^{-[R']}(V_\varphi^{R,U})^{\overline{R'}} \equiv N^{U,R'}(N_c^{R,R'})^{R'^{-1}UR'}.$$

In den Normierungsrelationen $(N^{\mathfrak{U},\mathfrak{R}})$ tritt das Element c, zu dem normiert wird, gar nicht auf. Deshalb soll ein Verkettungssystem, das wenigstens diesen Gleichungen $N^{U,R}(b) = 1$ genügt, *schwach normiert* genannt werden. Im Hinblick auf den zu Anfang dieses Paragraphen ausgesprochenen Gedanken ist dabei die folgende Aussage von Interesse:

Satz 4. *Wenn es überhaupt ein Verkettungssystem für $\mathfrak{E}$ zur Grundklasse gibt, so gibt es auch ein schwach normiertes.*

Beweis. Es ist zu zeigen, daß ein beliebiges Verkettungssystem $b_{\psi,S}$ zur Grundklasse sich durch eine Assoziiertheitssubstitution

$$b_{\psi,S} \to \hat{b}_{\psi,S} = b_{\psi,S} a_\psi^{[S]-1}$$

schwach normieren läßt:

$$N^{U,R}(\hat{b}) \equiv \hat{b}_{\varphi,U}^{-[R]} \hat{b}_U^{\bar{R}} = 1.$$

Dazu betrachte man das Teilsystem $b_{\psi,U}$ zur Fixgruppe $\mathfrak{U}$ von φ, die als Normalteiler auch Fixgruppe für alle ψ aus der Grundklasse ist:

$$V_\psi^{U,U'}(b) \equiv b_{\psi,UU'}^{-1} b_{\psi,U}^{U'} b_{\psi,U'} = 1, \quad b_{\psi,A} = \psi(A).$$

Für zunächst festen Vertreter $R \notin \mathfrak{U}$ bilden die Elemente

$$q_U = b_{\varphi\varrho,U}^{-1} b_U^{\mathfrak{r}(\varrho)} \quad \text{mit} \quad q_{UU'} = q_U^{U'} q_{U'}, \; q_A = 1,$$

eine verschränkte Darstellung von $\mathfrak{U}/\mathfrak{A}$ mit Faktorensystem 1. Es gibt also[4]) zu R ein a_R aus Ω mit

$$b_{\varphi\varrho,U}^{-1} b_U^{\mathfrak{r}(\varrho)} = a_R^{U-1}.$$

Man sieht nun, daß $\hat{b}_{\psi,S}$ mit $a_{\varphi\varrho} = a_R$ für $R \notin \mathfrak{U}$ nebst $a_\varphi = 1$ schwach normiert ist.

[4]) *A. Speiser*, Zahlentheoretische Sätze aus der Gruppentheorie. Math. Zeitschr. 5, 1—6 (1919). Dieser Schluß wird im folgenden häufig angewendet.

Mit dem damit bewiesenen Satz 4 ist gezeigt, daß sich wenigstens die Normierungsrelationen $(N^{\mathfrak{U},\mathfrak{R}})$ sicherlich erfüllen lassen, wenn es überhaupt ein Verkettungssystem für $\mathfrak{E}$ gibt. Daß die Vermutung (V.) widerlegt werden konnte, liegt also nach dem zu Anfang dieses Paragraphen Gesagten daran, daß sich nicht immer zugleich die Normierungsrelationen $N^{R,R'}(b) = 1$ mit $\mathfrak{m}(\varrho, \varrho') = 0$ erfüllen lassen. Die Beschränkung auf die Grundklasse $\mathfrak{R}$, also auf die Normierungsrelationen (N) statt der allgemeineren (B), wird in den folgenden Abschnitten gerechtfertigt. Nur in § 5 werden weitere Normierungsrelationen aus (B) herangezogen (dort (K) genannt), die sich in dem dort behandelten Spezialfall aber stets erfüllen lassen, wenn es nur ein Verkettungssystem $b_{\chi,S}$ (zur vollen Gruppe X) gibt.

§ 3. Die reduzierten Grundverkettungsgleichungen bei zyklischem Γ.

Die gemäß dem Erweiterungsproblem $\mathfrak{E}$ zu lösenden Gleichungen (W) sind durch Satz 1 hinsichtlich der Gruppe X auf die Erzeugende φ reduziert. Dabei ergaben sich die Grundverkettungsgleichungen (G). Eine Reduktion hinsichtlich der Gruppe $\mathfrak{G}$ auf ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{G}$ ist dann nur für die Gleichungen (2) in Satz 1′ durchgeführt. Eine weitere Reduktion hinsichtlich $\mathfrak{G}$, und zwar auf den Fixnormalteiler $\mathfrak{U}$ von φ und ein Vertretersystem $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{G}/\mathfrak{U} \cong \Gamma$, wird nun ermöglicht durch die Sätze 2, 3 und den Äquivalenzsatz. Darüber hinaus läßt sich eine Reduktion auf $\mathfrak{U}$ und ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{R}$ durchführen.

Dies soll zunächst für den Fall einer zyklischen Gruppe Γ näher ausgeführt werden. In diesem Fall wird $\mathfrak{G}$ erzeugt von $\mathfrak{U}$ und einem weiteren Element L mit den Relationen

$$L^{-1}UL = U^L \text{ in } \mathfrak{U}, \quad L^e \text{ in } \mathfrak{U}, \quad e = (\mathfrak{G} : \mathfrak{U}).$$

Das Vertretersystem $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{G}/\mathfrak{U}$ bestehe aus den Potenzen

$$R = L^\varepsilon \qquad (\varepsilon = 0, 1, \ldots, e-1),$$

während die Gruppe aller Potenzen von L mit $\mathfrak{L}$ bezeichnet werde.

Aus den Grundverkettungsgleichungen

$$(G) \qquad \begin{cases} (1) \quad G_c^{S,T}(b) \equiv b_{ST}^{-1} b_S^T b_T c^{-ST\mathfrak{m}(\sigma,\tau)} = 1, \quad b_A = \varphi(A) \\ (2) \qquad b_S^n = c^{\bar{S}-1} \end{cases}$$

möge für eine Vorbetrachtung das Teilsystem hervorgehoben werden, das sich nur auf die Untergruppe $\mathfrak{L}$ bezieht:

$$(1^{\mathfrak{L}}_{\alpha,\beta}) \qquad G_c^{L^\alpha, L^\beta}(b) = 1, \qquad \text{speziell} \quad (1^{\mathfrak{L}}_{\alpha}) \quad G_c^{L, L^\alpha}(b) = 1,$$

und, auf die Erzeugende L beschränkt:

$$(2^L) \qquad b_L^n = c^{L-1}.$$

Zur Abkürzung sei für $\alpha \geqq 0$ gesetzt:

$$f_\alpha(x) = \frac{x^\alpha - 1}{x - 1} = \sum_{0 \leq \alpha' < \alpha} x^{\alpha'}, \quad \mathfrak{m}^\alpha(\mu) = \frac{\mathfrak{r}(\mu)^\alpha - \mathfrak{r}(\mu^\alpha)}{n}.$$

Die Grundverkettungsgleichungen $(1^{\mathfrak{L}}_{\alpha,\beta})$ lassen sich dann reduzieren auf das Gleichungssystem $(\alpha = 0, 1, 2, \ldots)$

$$(D_\alpha) \qquad D_c^\alpha(b) \equiv b_{L^\alpha}^{-1} b_L^{f_\alpha(L)} c^{-L^\alpha \mathfrak{m}^\alpha(\lambda)} = 1,$$

wobei für beliebige Systeme a_S aus Ω die entsprechende Abkürzung $D_e^x(a)$ eingeführt sei. Es gilt nämlich:

Lemma. a) *Unter der Voraussetzung* (2^L) *sind die speziellen Gleichungen* $(1_x^{\mathfrak{L}})$ $(x \geqq 0)$ *äquivalent mit den Gleichungen* (D_α) $(\alpha \geqq 0)$, *und zwar besteht diese Äquivalenz genauer schon in jedem Teilbereich*:

$$(1_\alpha^{\mathfrak{L}}) \text{ für } 0 \leqq \alpha < N-1 \longleftrightarrow (D_\alpha) \text{ für } 0 \leqq \alpha < N.$$

b) *Unter Voraussetzung von* (2^L) *kann aus den Gleichungen* $(1_\alpha^{\mathfrak{L}})$ *auf die allgemeineren Gleichungen* $(1_{\alpha,\beta}^{\mathfrak{L}})$ *geschlossen werden*; *genauer*:

$$(1_\alpha^{\mathfrak{L}}) \text{ für } 0 \leqq \alpha < N-1 \longrightarrow (1_{\alpha,\beta}^{\mathfrak{L}}) \text{ für } 0 \leqq \alpha, \beta, \alpha+\beta < N.$$

c) *Unter der Voraussetzung, daß neben* (2^L) *auch noch die Gleichungen* $(1_{\alpha,N}^{\mathfrak{L}})$ *für* $0 \leqq \alpha < N$ *erfüllt sind, kann aus den Gleichungen* (D_α) *für* $0 \leqq \alpha \leqq N$ *auf die Gleichungen* (D_α) *für* $0 \leqq \alpha < 2N$ *geschlossen werden*:

$$(1_{\alpha,N}^{\mathfrak{L}}) \text{ und } (D_\alpha) \text{ für } 0 \leqq \alpha < N \longrightarrow (D_\alpha) \text{ für } 0 \leqq \alpha < 2N.$$

Beweis. Als Folge der Relationen

$$f_{\alpha+\beta}(\bar{L}) = \bar{L}^\beta f_\alpha(\bar{L}) + f_\beta(L), \quad L^\alpha = \overline{L^\alpha} + L^\alpha n \mathfrak{m}^\alpha(\lambda),$$
$$\mathfrak{m}^{\alpha+\beta}(\lambda) = \mathfrak{r}(\lambda)^\alpha \mathfrak{m}^\beta(\lambda) + \mathfrak{r}(\lambda^\beta)\mathfrak{m}^\alpha(\lambda) + \mathfrak{m}(\lambda^\alpha, \lambda^\beta)$$

sowie der Voraussetzung (2^L) ergeben sich die Gleichungen

$$G_e^{L^\alpha, L^\beta}(b) = \frac{D^{\alpha+\beta}}{(D^\alpha)^{\bar{L}^\beta} D^\beta}(b) \quad \text{mit} \quad D^\alpha \equiv D_e^\alpha.$$

Hieraus fließt unmittelbar die Aussage c), und unter Voraussetzung von a) auch die Aussage b). Die Aussage a) ihrerseits ergibt sich aus den genannten Gleichungen für $\alpha = 1$:

$$G_e^{L, L^\beta}(b) = \frac{D^{\beta+1}}{D^\beta}(b), \quad \text{also } D^\alpha(b) = \prod_{0 \leqq \alpha' < \alpha} G_e^{L, L^{\alpha'}}(b).$$

Das damit bewiesene Lemma wird im folgenden mit der Schranke $N = e$ angewandt. Dabei werde dann $D_e^e \equiv D_e$ gesetzt.

Es werden nunmehr endgültig aus den Grundverkettungsgleichungen (G) und ihren Folgerelationen die folgenden, auf die Erzeugung $\mathfrak{G} = \{\mathfrak{U}, L\}$ bezüglichen als *reduzierte Grundverkettungsgleichungen* hervorgehoben:

$$(\bar{G}) \quad \begin{cases} (\bar{1}) \begin{cases} (1^{\mathfrak{U}}) & G^{U,U'}(b) \equiv b_{UU'}^{-1} b_U^{U'} b_{U'} = 1, \quad b_A = \varphi(A) \\ (1^{\mathfrak{U},L}) & \dfrac{G^{U,L}}{G^{L,U^L}}(b) \equiv \dfrac{b_U^{\bar{L}}}{b_{U^L}} b_L^{1-U^L} = 1 \\ (1^{L^e}) & D_e(b) \equiv b_{L^e}^{-1} b_L^{f_e(\bar{L})} c^{-L^e \mathfrak{m}^e(\lambda)} = 1 \end{cases} \\ (\bar{2}): \ (2^{\mathfrak{U}}) \quad b_U^n = c^{U-1}, \qquad (2^L) \quad b_L^n = c^{\bar{L}-1}. \end{cases}$$

Dabei ist (1^{L^e}) in Lemma a) als Folgerelation der Grundverkettungsgleichungen erkannt.

Die Reduktion von (G) auf $(\bar{G})$ leistet der folgende Satz:

Satz 5. *Γ sei zyklisch. Jede Lösung b_U, b_L, c von $(\bar{G})$ läßt sich auf eine und nur eine Weise zu einer Lösung b_S, c von (G) ausbauen, nämlich in den folgenden beiden Schritten*:

(i) *Man bilde aus den b_L, c die $b_{L^\varepsilon} = b_R$ $(\varepsilon = 0, 1, \ldots, e-1)$ nach den Gleichungen*

$$(D_\varepsilon) \qquad D_e^\varepsilon(b) = 1.$$

(ii) *Man bilde aus den b_U, b_R als speziellen Grundverkettungsfaktoren die sämtlichen Grundverkettungsfaktoren b_S nach den speziellen ersten Verkettungsgleichungen*

$$(V_\varphi^{\mathfrak{R},\mathfrak{U}}) \qquad V_\varphi^{R,U}(b) = 1$$

aus Satz 2.

Beweis. 1) Die im Satz genannten Elemente b_U, b_R sind nach Satz 2 spezielle Grundelemente eines eindeutig bestimmten Verkettungssystems $b_{\varphi,S}$ zur Grundklasse $\mathfrak{R}$, dessen sämtliche Grundelemente b_S gerade durch die Gleichungen $(V_\varphi^{\mathfrak{R},\mathfrak{U}})$ gegeben sind.

2) Eindeutigkeit: Ist b_S, c Lösung von (G), so sind die b_S nach Satz 1 sicherlich die Grundelemente eines Verkettungssystems zur Grundklasse $\mathfrak{R}$. Deshalb sind sie nach 1) durch b_U, b_R eindeutig bestimmt. Ferner sind aber nach Lemma a) die $b_R = b_{L^\varepsilon}$ notwendig mittels der Gleichungen (D_ε) aus b_L und c gebildet. Daher sind weiter die b_R durch b_L, c eindeutig bestimmt. Zusammengenommen sind demnach die b_S durch b_U, b_L, c eindeutig bestimmt.

3) Zum Nachweis von (G) für die gemäß (i), (ii) gebildeten b_S, c genügt der Nachweis von (1), da dann nach Satz 1′ aus den vorausgesetzten Gleichungen $(2^{\mathfrak{U}})$, (2^L) auch die übrigen Gleichungen (2) folgen. Der Nachweis von (1) aber läuft nach dem Äquivalenzsatz darauf hinaus zu zeigen, daß das in 1) genannte System $b_{\varphi,S}$ zu c normiert ist, oder also, daß $b_{\varphi,S}$ den reduzierten Normierungsbedingungen $(N^{\mathfrak{U},\mathfrak{R}})$, $(N^{\mathfrak{R}})$ aus Satz 3 genügt.

4) Die Gleichungen $(N^{\mathfrak{R}})$ sind, wiederum nach dem Äquivalenzsatz, gleichbedeutend mit den Grundverkettungsgleichungen

$$G_e^{R,R'}(b) = 1.$$

Diese sind identisch mit den Gleichungen $(1^{\mathfrak{Q}}_{\alpha,\beta})$ für $0 \leqq \alpha, \beta < e$, die in Lemma b) als Folge von (2^L) und $(1^{\mathfrak{Q}}_\alpha)$ für $0 \leqq \alpha < 2e - 1$ erkannt sind.

Nun sind aber nach der Definitionsforderung (i) die Gleichungen (D_α) für $0 \leqq \alpha < e$ erfüllt und nach der Voraussetzung (1^{L^e}) auch für $\alpha = e$. Nach der Definitionsforderung $(V_\varphi^{\mathfrak{R},\mathfrak{U}})$ aus (ii) für $U = L^e$ sind ferner die Gleichungen $(1^{\mathfrak{Q}}_{\alpha,e})$ für $0 \leqq \alpha < e$ erfüllt. Nach Lemma c) kann somit auf die Gleichungen (D_α) für $0 \leqq \alpha < 2e$ geschlossen werden, die wegen Lemma a) mit $(1^{\mathfrak{Q}}_\alpha)$ für $0 \leqq \alpha < 2e - 1$ äquivalent sind. Damit sind also nach dem Gesagten die Gleichungen $(1^{\mathfrak{Q}}_{\alpha,\beta})$, und somit insbesondere auch die mit $(N^{\mathfrak{R}})$ äquivalenten Gleichungen $G_e^{R,R'}(b) = 1$ nachgewiesen.

5) Es bleibt zu zeigen, daß auch

$$(N^{\mathfrak{U},\mathfrak{R}}) \qquad N^{U,R}(b) \equiv b_{\varphi,U}^{-[R]} b_U^R = 1$$

gilt. Für $R = 1$ ist das sicher der Fall. Für alle $R = L^\varepsilon$ $(\varepsilon = 0, 1, \ldots, e-1)$ folgt es nun durch Induktion nach ε, d. h. durch Schluß von R auf LR, wobei R fest sei. Es gilt nämlich:

$$\left(\frac{V_\varphi^{U,L}}{V_\varphi^{L,U^L}}\right)^{[R]} \frac{N_c^{L,R}}{N^{U^L,R}} \left(\frac{G^{L,U^L}}{G^{U,L}}\right)^{\bar{R}} \frac{1}{(N_c^{L,R})^{R^{-1}U^L R}}(b) \equiv b_{\varphi,U}^{[LR]} b_U^{-\bar{L}\bar{R}} c^{(U-1)LR\,\mathfrak{m}(\lambda,\varrho)}.$$

Aus den ersten Verkettungsgleichungen $V_\varphi^{S,T}(b) = 1$, aus den vorausgesetzten Relationen $(1^{\mathfrak{U},L})$ und den schon unter 4) bewiesenen $N^{L,R}(b) = 1$, sowie aus der Induktionsannahme $N^{U,R}(b) = 1$ folgt somit, daß der rechtsstehende Ausdruck gleich 1 ist. Nach den vorausgesetzten Gleichungen $(2^{\mathfrak{U}})$ ergibt dies aber gerade die Induktionsbehauptung

$$N^{U,LR}(b) \equiv b_{\varphi,U}^{-[LR]} b_U^{\overline{LR}} = 1.$$

Damit ist Satz 5 bewiesen.

Durch diesen Satz ist die Lösung der Erweiterungsaufgabe zurückgeführt auf die Lösung der reduzierten Grundverkettungsgleichungen $(\bar{G})$.

§ 4. Lösung des Erweiterungsproblems $\mathfrak{E}$ bei zyklischem Γ mit Zusatzbedingung.

Die Lösung der Erweiterungsaufgabe $\mathfrak{E}$ (im Sinne der Vermutung (V.)) verlangt, aus einem Verkettungssystem $\hat{b}_{\chi,S}$ — Lösung von (V) — eine Lösung b_S, c der Grundverkettungsgleichungen (G) zu konstruieren. Nach dem Reduktionssatz 5 genügt dazu, wenn Γ zyklisch ist, die Konstruktion einer Lösung b_U, b_L, c von $(\bar{G})$.

Wie schon zu Anfang von § 2 bemerkt, muß sich dazu $\hat{b}_{\chi,S}$ (durch Übergang zu Assoziierten) zu einem geeigneten c im Sinne der Gleichungen (B) normieren lassen, so daß es dann den Gleichungen (1) genügt. Dies lenkte die Aufmerksamkeit auf diejenigen unter den Normierungsrelationen (B), in denen c gar nicht auftritt. Vorerst genügt es, sich auf die Grundklasse $\mathfrak{K}$, also die Normierungsrelationen (N) zu beschränken, und insbesondere auf die speziellen $N^{U,L}(\hat{b}) = 1$ unter den schwachen Normierungsrelationen $(N^{\mathfrak{U},\mathfrak{K}})$. Letztere sind nach dem Äquivalenzsatz und wegen $N^{S,U} \equiv 1$ gleichbedeutend mit den in (1) enthaltenen Gleichungen $(1^{\mathfrak{U},L})$

$$\frac{G^{U,L}}{G^{L,U^L}}(\hat{b}) = N^{U,L}(\hat{b}) = 1.$$

Es wird sich nun zeigen, daß man, ausgehend von einem beliebigen schwach normierten Verkettungssystem $\hat{b}_{\psi,S}$, durch geeignete Potenzierung zu einem anderen solchen übergehen kann, für das sich eine Lösung c von (1^{L^e}), $(\bar{2})$, also von $(\bar{G})$, ohne weiteres angeben läßt. Hierzu ist das Problem $\mathfrak{E}$ allerdings noch einer Zusatzbedingung (Z.) zu unterwerfen. Erst in dem später zu behandelnden Sonderfall (S.), in dem diese Bedingung nicht erfüllt ist, werden von den Normierungsrelationen (B) auch noch solche herangezogen, die nicht der Grundklasse entsprechen.

Zunächst sei $\Gamma = 1$. Dann ist die Vermutung (V.) bekanntlich (sogar für abelsches $\mathfrak{A}$) richtig. Für den hier allein interessierenden Fall, daß $\mathfrak{A}$ zyklisch ist, liest man das einfach daraus ab, daß sich bei $\mathfrak{G} = \mathfrak{U}$ die (reduzierten) Grundverkettungsgleichungen zu

$$b_{ST}^{-1} b_S^T b_T = 1, \quad b_A = \varphi(A)$$
$$b_S^n = c^{S-1}$$

vereinfachen. Für jede Lösung b_S der ersteren bilden dann die b_S^n eine verschränkte Darstellung von $\mathfrak{G}/\mathfrak{A} = \mathfrak{g}$ mit dem Faktorensystem 1, und daher existiert zu ihnen eine Lösung c der zweiten.

Es werde jetzt weiter der Fall, daß Γ zyklisch ist, mit der folgenden Zusatzbedingung betrachtet:

(Z.) *Die durch die Ordnung e und die Erzeugende λ mod n von Γ bestimmte Potenzübertragungszahl*

$$\mathfrak{m}^e(\lambda) = \frac{\mathfrak{r}(\lambda)^e - 1}{n}$$

soll prim zur Ordnung n von $\mathfrak{A}$ sein, so daß die Kongruenz

$$\mathfrak{m}' \mathfrak{m}^e(\lambda) \equiv 1 \bmod n$$

eine ganzzahlige Lösung $\mathfrak{m}'$ besitzt.

Zu dieser Zusatzbedingung seien folgende Bemerkungen gemacht.[4a])

1. *Motivierung.* Der obige Beweis im Falle $\Gamma = 1$ beruhte wesentlich auf der Tatsache, daß der in den ersten Grundverkettungsgleichungen (1) mit dem Zahlexponenten $\mathfrak{m}(\sigma, \tau)$ auftretende Grundfaktor c für $\Gamma = 1$ herausfällt, so daß zur Bestimmung von c

[4a]) Diese klärenden Bemerkungen verdanke ich wörtlich Herrn Professor Hasse.

aus den b_S nur die zweiten Grundverkettungsgleichungen (2) zu lösen waren. Für beliebiges zyklisches Γ fällt nun zwar bei der in Satz 5 erzielten Reduktion der Grundfaktor c aus den ersten Gleichungen (1) nicht heraus, tritt aber doch nur in der einen, auf L^e bezüglichen Gleichung (1^{L^e}) auf, mit dem Zahlexponenten $\mathfrak{m}^e(\lambda)$. Da c in seiner Assoziiertheitsklasse nur bis auf eine n-te Potenz als Zusatzfaktor festliegt, macht es die Zusatzbedingung (Z.) möglich, c vermöge der Gleichung (1^{L^e}) explizit durch b_{L^e} und b_L auszudrücken, so daß dann nur noch zu prüfen bleibt, ob sich für das so erhaltene c auch die zweiten Gleichungen (2) durch eine Assoziiertheitssubstitution für die b_U und b_L erzwingen lassen.

2. *Spielraum.* In der Zusatzbedingung (Z.) ist sowohl die Wahl der Erzeugenden $\lambda \bmod n$ von Γ als auch — von dem bereits erledigten Falle $\Gamma = 1$ abgesehen — die Wahl des Repräsentanten $\mathfrak{r}(\lambda)$ verfügbar, letzteres, da dem zugrundegelegten Restsystem $\mathfrak{r} \mid \bmod n$ nur die Bedingung $\mathfrak{r}(1) = 1$ auferlegt war. Die Zusatzbedingung kann also so verstanden werden: Bei geeigneter Wahl der Erzeugenden $\lambda \bmod n$ von Γ und bei geeigneter Wahl ihres Zahlrepräsentanten $\mathfrak{r}(\lambda)$ soll $\mathfrak{m}^e(\lambda)$ prim zu n sein.

3. *Tragweite.* Wegen $\Gamma \cong \mathfrak{G}/\mathfrak{U}$ ist die Ordnung e von Γ ein Teiler der Ordnung $\varphi(n)$ der Automorphismengruppe von $\mathfrak{A}$ (hier als solche von X auftretend) und der Ordnung von $\mathfrak{g}$. Beschränkt man sich gemäß den Kochendörfferschen Reduktionen [5] auf p-Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{g}$ und setzt für den Augenblick $n = p^\gamma$, so ist demnach $e = p^\beta$ eine p-Potenz, enthalten in dem Bestandteil $p^{\gamma-1}$ von $\varphi(p^\gamma) = (p-1)\,p^{\gamma-1}$, und unter Beiseitelassung des bereits erledigten Falles $\Gamma = 1$ hat man $\beta \geqq 1$ und daher $\gamma \geqq 2$. Die Zusatzbedingung (Z.) reduziert sich dann auf $\mathfrak{m}^e(\lambda) \not\equiv 0 \bmod p$, oder also auf die Forderung, daß über die Definitionskongruenz

$$\lambda^{p^\beta} \equiv \mathfrak{r}(\lambda)^{p^\beta} \equiv 1 \bmod p^\gamma \text{ mit minimalem } \beta \geqq 1$$

der Ordnung e hinaus die Inkongruenz

$$\mathfrak{r}(\lambda)^{p^\beta} \not\equiv 1 \bmod p^{\gamma+1}$$

bestehen soll. Nun kann man bekanntlich aus der gegenteiligen Annahme

$$\mathfrak{r}(\lambda)^{p^\beta} \equiv 1 \bmod p^{\gamma+1}$$

immer dann auf den Widerspruch

$$\mathfrak{r}(\lambda)^{p^{\beta-1}} \equiv 1 \bmod p^\gamma$$

zu der Minimaleigenschaft von β schließen, wenn nicht zugleich

$$p = 2,\ e = p^\beta = 2^1,\ \lambda \equiv -1 \bmod 2^\gamma$$

ist. Für eine zyklische p-Gruppe $\mathfrak{A}$ ist ferner Γ als Untergruppe der primen Restklassengruppe mod p^γ ebenfalls zyklisch, wenn nicht zugleich

$p = 2$, Γ echte Obergruppe des durch $\lambda \equiv -1 \bmod 2^\gamma$ erzeugten Zyklus der Ordnung 2

ist. Setzt man also nur voraus:

$\mathfrak{A}$ (*zyklisch*) *und* $\mathfrak{g}$ *sind p-Gruppen,*

so ist die im folgenden zugrundegelegte Voraussetzung „Γ zyklisch mit Zusatzbedingung (Z.)“ erfüllt außer in dem Sonderfall

(S.) $\qquad p = 2,\ \Gamma$ enthält $\lambda \equiv -1 \bmod 2^\gamma$.

Der nachstehende Satz ergibt somit in dem allein wesentlichen Fall von p-Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{g}$ die Richtigkeit der Vermutung (V.) für zyklisches $\mathfrak{A}$, abgesehen von dem Sonderfall (S.).

Satz 6[5]. *Ist Γ zyklisch mit Zusatzbedingung* (Z.), *so folgt aus der Lösbarkeit der ersten Verkettungsgleichungen* $(V_{\mathfrak{K}})$ *zur Grundklasse $\mathfrak{K}$ die Lösbarkeit der Grundverkettungsgleichungen* (G) *und damit des Erweiterungsproblems $\mathfrak{E}$.*

Genauer: Ist $\hat{b}_{\psi,S}$ ein (gemäß Satz 4) schwach normiertes Verkettungssystem zu $\mathfrak{K}$, so erhält man aus den speziellen Grundelementen $\hat{b}_U$, $\hat{b}_L$ in der Form

$$\left.\begin{aligned} b_U &= \hat{b}_U^{\mathfrak{m}'\mathfrak{m}^e(\lambda)}, \quad b_L = \hat{b}_L^{\mathfrak{m}'\mathfrak{m}^e(\lambda)} \\ c &= \left(\hat{b}_{L^e}^{-1}\hat{b}_L^{f_e(\bar{L})}\right)^{L^{-e}\mathfrak{m}'} \end{aligned}\right\} \textit{mit } \mathfrak{m}'\mathfrak{m}^e(\lambda) \equiv 1 \bmod n$$

eine Lösung b_U, b_L, c der reduzierten Grundverkettungsgleichungen $(\bar{G})$, die sich dann nach Satz 5 eindeutig zu einer Lösung der vollen Grundverkettungsgleichungen (G) fortsetzt.

Bemerkung. Von den schwachen Normierungsbedingungen $N^{U,R}(\hat{b}) = 1$ braucht man an sich nur das Teilsystem $N^{U,L}(\hat{b}) = 1$ zu fordern. Aber das ist nach Satz 4 unwesentlich.

Beweis des Satzes. Es ist zu zeigen, daß aus den Gleichungen

$$V_\psi^{S,T}(\hat{b}) = 1,\ \hat{b}_{\psi,A} = \varphi(A),\ N^{U,L}(\hat{b}) = 1, \text{ also auch } (\hat{1}^{\mathfrak{U},L})\ \frac{G^{U,L}}{G^{L,U^L}}(\hat{b}) = 1$$

(letztere folgt aus dem Äquivalenzsatz) bei der angegebenen Definition der b_U, b_L, c für diese die Gleichungen $(\bar{G})$ folgen, also

$$(\bar{G}) \quad \begin{cases} (1): \ (1^{\mathfrak{U}}), \quad (1^{\mathfrak{U},L}), \quad (1^{L^e}) \\ (\bar{2}): \ (2^{\mathfrak{U}})\ b_U^n = c^{U-1}, \ (2^L)\ b_L^n = c^{L-1}. \end{cases}$$

$(1^{\mathfrak{U}})$, $(1^{\mathfrak{U},L})$ sind erfüllt, weil die $\hat{b}_U$, $\hat{b}_L$ den entsprechenden Gleichungen genügen, wobei zum Beweis von $b_A = \varphi(A)$ die Bedingung $\mathfrak{m}'\mathfrak{m}^e(\lambda) \equiv 1 \bmod n$ zum Tragen kommt. Die Gleichung (1^{L^e}) folgt formal aus den Definitionsgleichungen (siehe hierzu die Bemerkung 1 vor der Formulierung des Satzes). Es bleiben also nur die Gleichungen $(\bar{2})$ nachzuweisen.

Nachweis von (2^L): Definitionsgemäß, unter Beachtung von $\bar{L}^e = L^e + L^e n\mathfrak{m}^e(\lambda)$ und der Relationen $(\hat{1}^{\mathfrak{U},L})$, hat man

$$c^{\bar{L}-1} = \left(\frac{\hat{b}_L^{\bar{L}^e-1}}{\hat{b}_{L^e}^{\bar{L}-1}}\right)^{L^{-e}\mathfrak{m}'} = \hat{b}_L^{n\mathfrak{m}'\mathfrak{m}^e(\lambda)}\left(\frac{\hat{b}_L^{\bar{L}^e-1}}{\hat{b}_{L^e}^{\bar{L}-1}}\right)^{L^{-e}\mathfrak{m}'} = b_L^n.$$

Nachweis von $(2^{\mathfrak{U}})$: Es sei $L^{-\alpha}UL^\alpha = U_{(\alpha)}$ gesetzt. Definitionsgemäß und unter Beachtung von

$$f_e(\bar{L})(U_{(e)} - 1) = \sum_{\alpha=1}^{e} \bar{L}^{e-\alpha}(U_{(e)} - 1) = \sum_{\alpha=1}^{e}(U_{(\alpha)} - 1)\bar{L}^{e-\alpha}$$

sowie der Gleichungen $(\hat{1}^{\mathfrak{U},L})$ in der Form

$$\hat{b}_L^{(U_{(\alpha)}-1)\bar{L}^{e-\alpha}} = \frac{\hat{b}_{U_{(\alpha-1)}}^{\bar{L}^{e-(\alpha-1)}}}{\hat{b}_{U_{(\alpha)}}^{\bar{L}^{e-\alpha}}}$$

---

[5]) In einem Spezialfall, in dem insbesondere $\mathfrak{G} = \mathfrak{L} \times \mathfrak{U}$, $\mathfrak{A}$ zyklische p-Gruppe mit $p \neq 2$ und Γ die volle Automorphismengruppe von $\mathfrak{A}$ ist, stammen Satz und Beweis von *Delone-Faddeev* [1]. Der Beweis vereinfacht sich vor allem durch die Voraussetzung $\mathfrak{G} = \mathfrak{L} \times \mathfrak{U}$.

hat man

$$c^{U-1} = \left(\frac{\hat{b}'^{e(L)}_{L}}{\hat{b}_{L^e}}\right)^{L^{-e}(U-1)\mathfrak{m}'} = \left(\hat{b}^{1-U_{(e)}}_{L^e}\frac{\hat{b}^{L^e}_{U}}{\hat{b}_{U_{(e)}}}\right)^{L^{-e}\mathfrak{m}'} = b^{n}_{U}\left(\frac{\hat{b}^{L^e}_{U}\,\hat{b}_{L^e}}{b^{U_{(e)}}_{L^e}\,\hat{b}_{U_{(e)}}}\right)^{L^{-e}\mathfrak{m}'}.$$

Der zweite Faktor ist 1 wegen $V^{U,U'}_{\varphi}(\hat{b}) = 1$ und $UL^e = L^e U_{(e)}$.

Damit ist Satz 6 bewiesen.

Nach Satz 6 und den Kochendörfferschen Reduktionen [5] steht die Richtigkeit der Vermutung (V.) über die Erweiterungsaufgabe insbesondere für alle Erweiterungsprobleme $\mathfrak{E}$ mit zyklischer Gruppe $\mathfrak{A}$ ungerader Ordnung n fest. Um auch die zyklischen Gruppen $\mathfrak{A}$ gerader Ordnung zu erfassen, bleibt nach der ersten Kochendörfferschen Reduktion der Fall der zyklischen 2-Gruppen $\mathfrak{A}$ zu erledigen, und zwar nach der Bemerkung 3 vor Satz 6 nur noch der Sonderfall (S.).

§ 5. Lösung des Erweiterungsproblems $\mathfrak{E}$ bei zyklischem Γ im Sonderfall (S.).

Es sei jetzt $\mathfrak{A}$ (und somit auch X) eine 2-Gruppe, und Γ sei zyklisch und enthalte $\lambda \equiv -1 \bmod n$. Dann ist Γ notwendig von der Ordnung 2. Es wird sich zeigen, daß auch in diesem Fall die Vermutung (V.) zutrifft.

Es genügt hier aber nicht, wie in Satz 6, nur von einer Lösung $b_{\varphi^{\pm 1},S}$ der ersten Verkettungsgleichungen $(V_{\mathfrak{K}})$ zur Grundklasse $\mathfrak{K}$ auszugehen. Man hat vielmehr auch eine Lösung $b_{\tilde{\varphi},S}$ der ersten Verkettungsgleichungen $(V_{\tilde{\mathfrak{K}}})$ zur Γ-Klasse $\tilde{\mathfrak{K}}$ des quadratischen Charakters

$$\tilde{\varphi} = \varphi^{\tilde{n}}, \quad \tilde{n} = \frac{n}{2},$$

hinzuzunehmen. $\tilde{\mathfrak{K}}$ besteht nur aus dem einen Charakter $\tilde{\varphi}$. Diese Hinzunahme von $(V_{\tilde{\mathfrak{K}}})$ zu $(V_{\mathfrak{K}})$ ist im Sinne der Vermutung (V.) natürlich zulässig, da ja in deren allgemeiner Formulierung sogar die Lösbarkeit der ersten Verkettungsgleichungen (V) für alle Γ-Klassen vorausgesetzt wird.

Weiter genügt es nicht, das Verkettungssystem zur Grundklasse als schwach normiert vorauszusetzen. Erstens fällt der Grundfaktor c, wenn man im Zahlvertretersystem $\mathfrak{r}$ neben $\mathfrak{r}(1) = 1$ hier speziell

$$\mathfrak{r}(\lambda) = \mathfrak{r}(-1) = -1, \text{ also } \bar{L} = -L$$

wählt, nicht nur aus den schwachen Normierungsbedingungen $(N^{\mathfrak{U},\mathfrak{K}})$, sondern überhaupt aus allen Normierungsrelationen zur Grundklasse

$$(N) \qquad b_{\varphi^{-1},S} = b_S^{-1}$$

heraus. Und zweitens treten hier noch die Normierungsrelationen zur Klasse $\tilde{\mathfrak{K}}$, beschränkt auf die Untergruppe $\mathfrak{U}$, hinzu, die bei der weiteren Wahl $\mathfrak{r}(\tilde{n}) = \tilde{n}$ im Vertretersystem $\mathfrak{r}$ die Form

$$(K) \qquad b_{\tilde{\varphi},U} = b_U^{\tilde{n}}$$

annehmen. Sie können als *Koppelungsbedingungen* für die sonst voneinander unabhängigen Lösungen von $(V_{\mathfrak{K}})$ und $(V_{\tilde{\mathfrak{K}}})$ angesehen werden. Die spezielle Normierungsrelation für $\tilde{\mathfrak{K}}$

$$(\tilde{B}) \qquad b_{\tilde{\varphi},L} = b_L^{\tilde{n}} c^L$$

kann als Bestimmungsgleichung für c aufgefaßt werden, ähnlich wie die Gleichung (1^{L^e}) in § 4.

Auf diesen Ansatz für c kommt man (unter Voraussetzung von (N) und (K)) noch durch eine andere Überlegung. Die Verkettungsgleichungen zur Klasse $\mathfrak{K}$ entsprechen der Erweiterungsaufgabe $\tilde{\mathfrak{E}}$ für die Gruppe $\tilde{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}/\mathfrak{A}^2$ mit dem Normalteiler $\tilde{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}/\mathfrak{A}^2$ der Ordnung 2. Die zugeordnete Automorphismengruppe ist $\tilde{\Gamma} = 1$. Für diese Erweiterungsaufgabe $\tilde{\mathfrak{E}}$ trifft also die Vermutung (V.) zu, d. h. es gibt einen Grundfaktor c mit

$$(\tilde{2}) \qquad b^2_{\varphi,S} = b^2_{\tilde{\varphi},\tilde{S}} = c^{\tilde{S}-1} = c^{S-1},$$

wo $\tilde{S}$ die Restklasse von S nach $\mathfrak{A}^2$ bedeutet. Es ist nun die Frage, ob sich dabei der Grundfaktor c so wählen läßt, daß er darüber hinaus das volle Erweiterungsproblem $\mathfrak{E}$, also die Gleichungen $(\tilde{2})$ löst. Denn die Gleichungen (1) sind wegen (N) erfüllt. Nun wird $(2^{\mathfrak{U}})$ wegen (K) von jeder Lösung c von $(\tilde{2})$ erfüllt. Die Bedingung (2^L) dagegen nimmt wegen

$$c^{L-1} = c^{-2L} c^{L-1} = c^{-2L} b^2_{\tilde{\varphi},L}$$

bis auf das unwesentliche Vorzeichen ± 1 die Form $(\tilde{B})$ an.

Der Nachweis der Vermutung (V.) für das Erweiterungsproblem $\mathfrak{E}$ wird nun in den folgenden beiden Schritten geführt. Zunächst wird gezeigt, daß sich ein Verkettungssystem für $\mathfrak{K}$, $\tilde{\mathfrak{K}}$ stets gemäß (N), (K) normieren läßt, so daß dann insbesondere (nach dem Äquivalenzsatz) die ersten Grundverkettungsgleichungen (1) erfüllt sind. Und zweitens wird nachgewiesen, daß zu einem solchen normierten Verkettungssystem der durch $(\tilde{B})$ gegebene Ansatz für c die zweiten Grundverkettungsgleichungen (2) löst.

Satz 7′. *Es sei $\mathfrak{A}$ eine 2-Gruppe und Γ der durch $-1 \bmod n$ erzeugte Zyklus von der Ordnung 2. Eine Lösung $b_{\varphi^{\pm 1},S}$, $b_{\tilde{\varphi},S}$ der ersten Verkettungsgleichungen $(V_{\mathfrak{K}})$, $(V_{\tilde{\mathfrak{K}}})$ zur Grundklasse $\mathfrak{K}$ und zur Klasse $\tilde{\mathfrak{K}}$ des quadratischen Charakters $\tilde{\varphi}$ läßt sich durch Übergang zu Assoziierten gemäß (N), (K) normieren.*

Beweis. 1) Normierung nach (N): Es sei $b_{\varphi^{\pm 1},S}$ ein Verkettungssystem zur Grundklasse. Wegen der ersten Verkettungsgleichungen ist

$$V^{S,T}_{\varphi^{-1}} V^{S,T}_{\varphi}(b) = 1, \quad b_{\varphi^{-1},A} b_A = 1,$$

also $q_S = b_{\varphi^{-1},S} b_S$ eine verschränkte Darstellung von $\mathfrak{g} = \mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ mit Faktorensystem 1:

$$b_{\varphi^{-1},S} b_S = a^{1-S}.$$

Man sieht nun, daß das Verkettungssystem $a_{\varphi}^{[S]-1} b_{\varphi,S}$ zur Grundklasse mit $a_{\varphi} = 1$, $a_{\varphi^{-1}} = a$ die Gleichungen (N) erfüllt.

2) Normierung nach (K): Es sei $b_{\varphi^{\pm 1},S}$, $\hat{b}_{\tilde{\varphi},S}$ ein Verkettungssystem zu den beiden Γ-Klassen $\mathfrak{K}$, $\tilde{\mathfrak{K}}$. Zu zeigen ist, daß sich $\hat{b}_{\tilde{\varphi},S}$, durch Übergang zu Assoziierten, gemäß (K) mit $b_{\varphi^{\pm 1},S}$ koppeln läßt. Wegen der ersten Verkettungsgleichungen $(V_{\mathfrak{K}})$, $(V_{\tilde{\mathfrak{K}}})$ für die Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}$ ist $q_U = b_U^{-\tilde{n}} \hat{b}_{\tilde{\varphi},U}$ eine verschränkte Darstellung von $\mathfrak{U}/\mathfrak{A}$ mit Faktorensystem 1:

$$b_U^{-\tilde{n}} \hat{b}_{\tilde{\varphi},U} = \hat{a}^{1-U}.$$

Das Verkettungssystem $b_{\tilde{\varphi},S} = \hat{a}^{S-1} \hat{b}_{\tilde{\varphi},S}$ zur Klasse $\tilde{\mathfrak{K}}$ ist dann mit $b_{\varphi^{\pm 1},S}$ gemäß (K) gekoppelt.

Satz 7. *Ist $\mathfrak{A}$ eine 2-Gruppe und Γ der durch $-1 \bmod n$ erzeugte Zyklus von der Ordnung 2, so folgt aus der Lösbarkeit der ersten Verkettungsgleichungen $(V_{\mathfrak{K}})$ zur Grundklasse $\mathfrak{K}$ und $(V_{\tilde{\mathfrak{K}}})$ zur Klasse $\tilde{\mathfrak{K}}$ des quadratischen Charakters $\tilde{\varphi}$ die Lösbarkeit der Grundverkettungsgleichungen (G) und damit des Erweiterungsproblems $\mathfrak{E}$.*

Genauer: Ist $b_{\varphi^{\pm 1},S}$, $b_{\tilde{\varphi},S}$ ein gemäß Satz 7′ normiertes Verkettungssystem zu $\mathfrak{K}$ und $\tilde{\mathfrak{K}}$ — also Lösung von $(V_{\mathfrak{K}})$ und (N) sowie $(V_{\tilde{\mathfrak{K}}})$ und (K) — so bilden die Grundelemente b_S zusammen mit dem Grundfaktor

$$c = \left(b_L^{-\tilde{n}} b_{\tilde{\varphi},L}\right)^{L^{-1}}$$

eine Lösung b_S, c der Grundverkettungsgleichungen (G).

Beweis. Da wegen (N) nach dem Äquivalenzsatz die ersten Grundverkettungsgleichungen (1) erfüllt sind, genügt es, die Gleichungen

$$(\bar{2}): \qquad (2^{\mathfrak{U}}) \quad b_U^n = c^{U-1}, \qquad (2^L) \quad b_L^n = c^{\bar{L}-1}$$

als erfüllt nachzuweisen, da daraus nach Satz 1′ auch die allgemeinen zweiten Grundverkettungsgleichungen (2) folgen.

Unter Benutzung der ersten Verkettungsgleichungen für $b_{\tilde{\varphi},S}$ und der entsprechenden Grundverkettungsgleichungen für b_S

$$\frac{V_{\tilde{\varphi}}^{U,L}}{V_{\tilde{\varphi}}^{L,U^L}}(b) = 1, \qquad \frac{G^{U,L}}{G^{L,U^L}}(b) = 1$$

und der Koppelungsbedingung (K) ergibt sich

$$c^{(U-1)L} = c^{L(U^L-1)} = \left(\frac{b_{U^L}}{b_U^L}\right)^{\tilde{n}} \frac{b_{\tilde{\varphi},U}^L}{b_{\tilde{\varphi},U^L}} = b_U^{2\tilde{n}L} = b_U^{nL},$$

und damit $(2^{\mathfrak{U}})$. Unter Benutzung von

$$V_{\tilde{\varphi}}^{L,L}(b) = 1, \qquad G^{L,L}(b) = 1$$

und der Koppelungsbedingung (K) ergibt sich weiter

$$c^{(\bar{L}-1)L} = b_L^{(1-\bar{L})\tilde{n}} b_{\tilde{\varphi},L}^{-(L+1)} = \left(b_L^{-2\bar{L}} b_{L^2}\right)^{\tilde{n}} b_{\tilde{\varphi},L^2}^{-1} = b_L^{nL},$$

und damit (2^L).

Bemerkung. Während in Satz 6 nur die Grundklasse $\mathfrak{K}$ auftrat, mußte in Satz 7 die Existenz eines Verkettungssystems auch für die Klasse $\tilde{\mathfrak{K}}$ des quadratischen Charakters $\tilde{\varphi}$ gefordert werden. Diese Bedingung ist stets erfüllt, wenn die Gruppenerweiterung $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{A}$ partiell zerfällt, d. h. wenn $\mathfrak{G}$ eine echte Untergruppe $\mathfrak{H}$ mit

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}\mathfrak{A}$$

besitzt (oder wenn es ein Schreiersches Faktorensystem für diese Gruppenerweiterung gibt, das nicht die volle Gruppe $\mathfrak{A}$ erzeugt). Dann ist nämlich

$$b_{\tilde{\varphi},S} = 1, \quad b_{\tilde{\varphi},SA} = \tilde{\varphi}(A) \quad \text{für } S \text{ aus } \mathfrak{H}$$

ein Verkettungssystem für die Klasse $\tilde{\mathfrak{K}}$.

Im allgemeinen ist aber die zusätzliche Forderung der Existenz eines Verkettungssystems für $\tilde{\mathfrak{K}}$ eine echte Verschärfung. Das lehrt das folgende einfache Beispiel. Es sei $\mathfrak{G}$ die zyklische Gruppe der Ordnung 8, $\mathfrak{g}$ von der Ordnung 2 und $\Omega = \Omega_0(\sqrt{-1})$. Aus der Kommutativität von $\mathfrak{G}$ folgt dann $\chi_S(A) = \chi^S(A)$ und $\mathfrak{U} = \mathfrak{A}$. Die ersten Verkettungsgleichungen $(V_{\mathfrak{K}})$ zur Grundklasse, die nach Satz 2 mit den Gleichungen $(V_{\varphi}^{\mathfrak{U}})$:

$$b_A = \varphi(A)$$

äquivalent sind, besitzen auf jeden Fall eine Lösung. Die ersten Verkettungsgleichungen $(V_{\tilde{\mathfrak{K}}})$ zum quadratischen Charakter $\tilde{\varphi} = \varphi^2$ lassen sich mit einem erzeugenden Element S von $\mathfrak{G}$, $A_0 = S^2$ und $b = b_{\tilde{\varphi}, S}$ wegen $\tilde{\varphi}(A_0) = -1$ auf die Form bringen

$$b^{\mathfrak{g}} = \tilde{\varphi}(A_0) = -1, \quad b_{\tilde{\varphi}, S^\alpha} = b^{S}_{\tilde{\varphi}, S^{\alpha-1}} b,$$

wo der Exponent $\mathfrak{g}$ die Normbildung bezüglich $\mathfrak{g}$ bedeutet. Ihre Lösbarkeit ist also gleichbedeutend damit, daß -1 Norm von Ω/Ω_0 ist. Das ist aber z. B. für einen reellen algebraischen Zahlkörper Ω_0 wegen $\Omega = \Omega_0(\sqrt{-1})$ sicherlich nicht der Fall.

§ 6. Die reduzierten Grundverkettungsgleichungen bei 2-Gruppe $\mathfrak{A}$ und bizyklischem Γ.

Es sei $\mathfrak{A}$ eine p-Gruppe und Γ nicht zyklisch. Dann ist notwendig $p = 2$, also $n = 2^\gamma$, und Γ als Untergruppe der primen Restklassengruppe mod n ebenfalls eine 2-Gruppe, gleichgültig ob $\mathfrak{g}$ gemäß der zweiten Kochendörfferschen Reduktion ebenfalls als 2-Gruppe vorausgesetzt wird oder nicht. Da Γ nicht zyklisch sein sollte, gilt:

$$\mathfrak{G}/\mathfrak{U} \cong \Gamma \text{ bizyklisch von einem Typus } (e, 2) \text{ mit } 1 < e \mid 2^{\gamma-1},$$

genauer

$\mathfrak{G} = \{\mathfrak{U}, L, M\}$ mit zwei Erzeugenden L, M der Ordnungen e, 2 über $\mathfrak{U}$ und zugeordneten Restklassen λ $(\equiv 1 \bmod 2^2)$, $\mu \equiv -1 \bmod 2^\gamma$.

(Im folgenden soll der Buchstabe μ für diese M zugeordnete Restklasse mod n vorbehalten bleiben.) Für den genannten Fall soll nunmehr eine zu Satz 5 analoge Reduktion der Grundverkettungsgleichungen (G) durchgeführt werden.

Dazu beachte man, daß diese Reduktion mit Satz 5 bereits durchgeführt ist für das Erweiterungsproblem $\mathfrak{E}^*$ mit $\mathfrak{G}^* = \{\mathfrak{U}, L\}$ statt $\mathfrak{G}$, wo also eine abelsche Algebra K^*/Ω gesucht wird, die über dem Fixkörper $\Omega^* > \Omega_0$ von $\mathfrak{G}^*$ innerhalb Ω galoissch ist (und zwar mit der Gruppe $\mathfrak{G}^*$). Denn für dieses Problem ist die Automorphismengruppe $\Gamma^* \cong \mathfrak{G}^*/\mathfrak{U}$ zyklisch. Im Hinblick auf diese Tatsache werde aus dem Vertretersystem $\mathfrak{R}^*$

$$R^* = L^\varepsilon \qquad (\varepsilon = 0, 1, \ldots, e-1)$$

von $\mathfrak{G}^*/\mathfrak{U}$ das volle Vertretersystem $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{G}/\mathfrak{U}$ aufgebaut durch Multiplikation mit M^δ:

$$R = L^\varepsilon M^\delta \qquad (\varepsilon = 0, \ldots, e-1;\ \delta = 0, 1).$$

Das zugeordnete Zahlvertretersystem $\mathfrak{r} \mid \bmod n$ für Γ sei so bestimmt, daß neben $\mathfrak{r}(1) = 1$, $\mathfrak{r}(\mu) = \mathfrak{r}(-1) = -1$ allgemein

$$\mathfrak{r}(-\sigma) = -\mathfrak{r}(\sigma), \text{ also } \overline{MS} = \overline{SM} = -\overline{S}$$

gilt, was z. B. von den absolut kleinsten Resten erfüllt wird, da durchweg $\sigma \not\equiv \frac{n}{2} \bmod n$ ist. Man hat dann

$$\mathfrak{m}(\sigma, \mu) = 0, \ \mathfrak{m}(\sigma, \mu\tau) = -\mathfrak{m}(\sigma, \tau), \ \mathfrak{m}(\mu\sigma, \mu\tau) = \mathfrak{m}(\sigma, \tau).$$

Für $\overline{M} = -M$ wird der Gleichförmigkeit halber in den Formeln die Schreibweise $\overline{M}$ beibehalten.

Weil $\mathfrak{U}$ Normalteiler in $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}/\mathfrak{U} \cong \Gamma$ kommutativ ist, liegen die Bildungen

$$U^S = S^{-1}US, \ [S, T] = T^{-1}S^{-1}TS$$

durchweg in $\mathfrak{U}$. Für den Kommutator gilt in dieser Schreibweise

$$ST[S, T] = TS.$$

Entsprechend der Erzeugung $\mathfrak{G} = \{\mathfrak{U}, L, M\} = \{\mathfrak{G}^*, M\}$ mit den Relationen

$$U^L, L^e; \quad U^M, M^2, [L, M] \text{ in } \mathfrak{U}$$

werden nun aus den Grundverkettungsgleichungen (G) und ihren Folgerelationen die folgenden als *reduzierte Grundverkettungsgleichungen* hervorgehoben:

$$(\overline{G}) \left\{ \begin{array}{ll} (1) & \left\{ \begin{array}{ll} (1^*) & (1^{\mathfrak{U}})\ G^{U,U'}(b) = 1, \quad (1^{\mathfrak{U},L})\ \dfrac{G^{U,L}}{G^{L,U^L}}(b) = 1, \quad (1^{L^e})\ D_e(b) = 1 \\ (1^{\mathfrak{U},M}) & \dfrac{G^{U,M}}{G^{M,U^M}}(b) \equiv \dfrac{b_U^{\overline{M}}}{b_{U^M}}\, b_M^{1-U^M} = 1 \\ (1^{M^2}) & G^{M,M}(b) \equiv b_{M^2}^{-1}\, b_M^{\overline{M}+1} = 1 \\ (K^{L,M}) & K(b) \equiv \dfrac{b_M^{\overline{L}} b_L}{(b_L^{\overline{M}} b_M)^{[L,M]}\, b_{[L,M]}} = 1 \end{array} \right. \\ (2) & \left\{ \begin{array}{ll} (2^*): & (2^{\mathfrak{U}})\ b_U^n = c^{U-1}, \quad (2^L)\ b_L^n = c^{L-1} \\ (2^M) & b_M^n = c^{\overline{M}-1}. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Dabei sind die reduzierten Grundverkettungsgleichungen (1*), (2*) des Problems $\mathfrak{G}^*$ gesondert herausgestellt und ist zur Abkürzung $K(a)$ für beliebige Systeme $a_{\varphi,S}$ oder a_S eingeführt.

Daß auch die Gleichung $(K^{L,M})$ aus den Grundverkettungsgleichungen (G) folgt, ergibt sich aus der der Relation $ML = LM\,[L, M]$ für den Kommutator entsprechenden Identität

$$K \equiv \frac{G^{M,L}}{(G^{L,M})^{[L,M]}\, G^{LM,[L,M]}}.$$

In Analogie zu Satz 5 gilt dann hier:

Satz 8. *$\mathfrak{A}$ sei 2-Gruppe und Γ bizyklisch. Jede Lösung b_U, b_L, b_M, c von $(\overline{G})$ läßt sich auf eine und nur eine Weise zu einer Lösung b_S, c von (G) ausbauen, nämlich in den folgenden beiden Schritten:*

(i) *Man bilde die b_{L^ε} $(\varepsilon = 0, \ldots, e-1)$ nach den Gleichungen (D_ε) aus Satz 5 und dann $b_{L^\varepsilon M}$ gemäß den speziellen Grundverkettungsgleichungen*

$$(1^{L^\varepsilon, M}) \qquad G^{L^\varepsilon, M}(b) \equiv b_{L^\varepsilon M}^{-1}\, b_{L^\varepsilon}^{\overline{M}}\, b_M = 1.$$

(ii) *Man bilde aus den $b_U, b_R (R = L^\varepsilon M^\delta)$ als speziellen Grundverkettungsfaktoren die sämtlichen Grundverkettungsfaktoren b_S nach den speziellen ersten Verkettungsgleichungen*

$$(V_\varphi^{\mathfrak{R},\mathfrak{U}}) \qquad V_\varphi^{R,U}(b) = 1$$

aus Satz 2.

Beweis. 1) Die im Satz genannten Elemente b_U, b_R sind nach Satz 2 spezielle Grundelemente eines eindeutig bestimmten Verkettungssystems $b_{\varphi,S}$ zur Grundklasse $\mathfrak{R}$, dessen sämtliche Grundelemente b_S gerade durch die Gleichungen $(V_\varphi^{\mathfrak{R},\mathfrak{U}})$ gegeben sind.

2) Eindeutigkeit: Der Beweis verläuft analog wie in Satz 5, nur daß hier zu den Bestimmungsgleichungen (D_ε) für die $b_{R^\varepsilon} = b_{L^\varepsilon}$ noch die in (1) enthaltenen Bestimmungsgleichungen $(1^{L^\varepsilon, M})$ hinzukommen.

3) Zum Nachweis von (G) für die gemäß (i), (ii) gebildeten b_S, c genügt der Nachweis von (1), da dann nach Satz 1′ aus den vorausgesetzten Gleichungen $(2^{\mathfrak{U}})$, (2^L), (2^M) auch die übrigen Gleichungen (2) folgen. Die ersten Grundverkettungsgleichungen (1) ihrerseits sind jedenfalls innerhalb des Normalteilers $\mathfrak{G}^*$ von $\mathfrak{G}$ nach Satz 5 erfüllt.

Es sei nun $b_{\varphi,S}$ das in 1) angegebene Verkettungssystem zur Grundklasse. Dann nehmen die Gleichungen (1) nach dem Äquivalenzsatz die Form (N) der Normierungsrelationen an, und diese sind nach Satz 3 gleichbedeutend mit dem Teilsystem $(N^{\mathfrak{U},\mathfrak{R}})$, $(N^{\mathfrak{R}})$:

$$N^{U,R}(b) = 1, \quad N^{R,R'}(b) = 1.$$

Andererseits ist jede einzelne Normierungsrelation, wiederum nach dem Äquivalenzsatz, gleichbedeutend mit der entsprechenden Grundverkettungsgleichung. Deshalb sind die genannten Normierungsrelationen für R, R' aus $\mathfrak{R}^*$ erfüllt. Zu zeigen bleiben demnach die speziellen Normierungsrelationen

$$(1)\quad \begin{cases} N^{U,L^\varepsilon M}(b) \equiv b_{\varphi,U}^{-[L^\varepsilon M]} b_U^{\overline{L^\varepsilon M}} = 1 & (\varepsilon = 0, 1, \ldots, e-1) \\ N_c^{R,R'}(b) \equiv b_{\varphi,R}^{-[R']} b_R^{\overline{R'}} c^{-RR'\mathfrak{m}(\varrho,\varrho')} = 1 & (R, R' \text{ nicht beide in } \mathfrak{R}^*). \end{cases}$$

4) Zum Beweis von (1) stehen zur Verfügung: a) Definitionsgemäß die Gleichungen $(\overline{G})$, (D_ε), $(1^{L^\varepsilon,M})$ für die b_S; b) die ersten Verkettungsgleichungen für die $b_{\varphi,S}$ (also insbesondere der Äquivalenzsatz); c) die Grundverkettungsgleichungen $G_e^{S,T}(b) = 1$ und Normierungsrelationen $N_e^{S,T}(b) = 1$ für S, T aus $\mathfrak{G}^*$; d) wie jetzt gezeigt werden soll, in Ergänzung zu $(K^{L,M})$ auch die entsprechend gebildeten Gleichungen

$$(K^{L^\varepsilon,M}) \qquad K^{L^\varepsilon,M}(b) \equiv \frac{b_M^{\overline{L^\varepsilon}} b_{L^\varepsilon}}{(b_M b_{L^\varepsilon}^{\overline{M}})^{[L^\varepsilon,M]} b_{[L^\varepsilon,M]}} = 1$$

mit

$$K^{L^\varepsilon,M} \equiv \frac{G^{M,L^\varepsilon}}{(G^{L^\varepsilon,M})^{[L^\varepsilon,M]} G^{L^\varepsilon M,[L^\varepsilon,M]}}, \quad K^{L,M} \equiv K.$$

Diese Gleichungen ergeben sich durch vollständige Induktion nach ε, d. h. durch Schluß von festem $R = L^\varepsilon$ auf RL, unter Heranziehung der Gleichungen $(1^{\mathfrak{U}})$, $(1^{\mathfrak{U},L})$, (2^M) aus $(\overline{G})$ und schließlich der wegen c) sicher richtigen Gleichungen $G_e^{R,L}(b) = 1$. Es gilt nämlich wegen $[RL, M] = [L, M]\,[R, M]^L$ die Identität

$$G^{[L,M],[R,M]^L} (K^{L,M})^{[R,M]^L} \left(\frac{G^{[R,M],L}}{G^{L,[R,M]^L}}\right) (K^{R,M})^L\,(b)$$

$$\equiv \frac{b_M^{\overline{RL}} b_{RL}}{(b_M b_{RL}^{\overline{M}})^{[RL,M]} b_{[RL,M]}} \frac{G_e^{R,L}(b)\, c^{RL\mathfrak{m}(\varrho,\lambda)}}{(G_e^{R,L}(b)\, c^{RL\mathfrak{m}(\varrho,\lambda)})^{\overline{M}[RL,M]}},$$

wobei im Nenner der rechten Seite die Identität

$$\overline{M}[R, M]\,\overline{L} = \overline{L}\overline{M}\,[L, M]\,[R, M]^L = \overline{L}\overline{M}\,[RL, M]$$

zu berücksichtigen ist. Unter Beachtung von $\overline{RL} = \overline{RL} + nRL\mathfrak{m}(\varrho, \lambda)$ und unter Anwendung der genannten Gleichungen für die b_S, insbesondere noch der Gleichung (2^M), ergibt dies unmittelbar die Induktionsbehauptung $(K^{RL,M})$.

5) Neben den in 4) unter a) bis d) genannten Gleichungen stehen, wie nun gezeigt werden soll, noch die *Spiegelungsrelationen*

$$b_{\varphi^{-1},S} = b_{\varphi,S}^{-1}$$

zur Verfügung.

Der Vergleich der ersten Verkettungsgleichungen $V_{\varphi}^{S,T}(b) = 1$ und $V_{\varphi^{-1}}^{S,T}(b) = 1$ lehrt, daß es genügt, die Spiegelungsrelationen für $\psi = \varphi$ herzuleiten, die mit den speziellen Normierungsrelationen

$$N^{S,M}(b) = b_{\varphi,S}^{-[M]} b_S^{\overline{M}} = 1$$

gleichbedeutend sind. Diese ihrerseits folgen für das Erzeugendensystem $S = U, L, M$ von $\mathfrak{G}$ aus (1) und der in der Definition (i) enthaltenen Gleichung $G^{L,M}(b) = 1$, unter Heranziehung des Äquivalenzsatzes und wegen $N^{S,U} \equiv 1$:

$$N^{U,M}(b) = \frac{G^{U,M}}{G^{M,U^M}}(b) = 1, \quad N^{L,M}(b) = G^{L,M}(b) = 1, \quad N^{M,M}(b) = G^{M,M}(b) = 1.$$

Für ganz $\mathfrak{G}$ folgen die genannten Normierungsrelationen dann aus den wegen der ersten Verkettungsgleichungen $V_{\varphi}^{S,T}(b) = 1$, $V_{\varphi^{-1}}^{S,T}(b) = 1$ und nach Definition von $N_c^{S,T}$ richtigen Gleichungen

$$N^{S^T,M}(b) = (N^{S,M})^{T^M} N^{T,M}(b) \text{ für } T \text{ aus } \{\mathfrak{U}, M\}.$$

Damit sind die Spiegelungsrelationen nachgewiesen.

6) Beweis von $(\bar{\bar{1}})$: Die Spiegelungsrelationen besagen, daß für das System $b_{\varphi,S}$ neben den allgemein gültigen Beziehungen $\overline{RM} = -\overline{R}M$, $\mathfrak{m}(\varrho, \mu\varrho') = -\mathfrak{m}(\varrho, \varrho')$ auch

$$b_{\varphi,S}^{[RM]} = b_{\varphi,S}^{-[R]M}$$

gilt. Deshalb ist

$$N^{U,L^\varepsilon M}(b) = (N^{U,L^\varepsilon}(b))^{-M}, \quad N_c^{R,L^\varepsilon M}(b) = (N_c^{R,L^\varepsilon}(b))^{-M}.$$

Aus 4, c) folgt somit $(\bar{\bar{1}})$ für R aus $\mathfrak{R}^*$, und ferner ist nun nur noch

$$N_c^{L^\varepsilon M,R}(b) = 1 \text{ für } R \text{ aus } \mathfrak{R}^*$$

nachzuweisen, wobei $(\bar{\bar{1}})$ für R aus $\mathfrak{R}^*$ benutzt werden kann.

Es sei also R aus $\mathfrak{R}^*$. Wegen $N_c^{R,M}(b) = 1$ und $N^{S,U} \equiv 1$ nehmen die noch nicht ausgenutzten Relationen $K^{R,M}(b) = 1$ aus 4, d) nach dem Äquivalenzsatz die Form an:

$$K^{R,M}(b) = \frac{G^{M,R}}{(G^{R,M})^{[R,M]} G^{RM,[R,M]}}(b) = N^{M,R}(b) = 1.$$

Das sind schon die gesuchten Gleichungen für $\varepsilon = 0$.

Weiter gilt wegen der Spiegelungsrelationen $b_{\psi,S}^{[M]} = b_{\psi,S}^{-M}$ und der Beziehung $\mathfrak{m}(\lambda^\varepsilon \mu, \varrho) = -\mathfrak{m}(\lambda^\varepsilon, \varrho)$

$$N_c^{L^\varepsilon M,R}(V_{\varphi\varrho}^{L^\varepsilon,M})^{-R}(G^{L^\varepsilon,M})^R(b) = (N_c^{L^\varepsilon,R})^{-R^{-1}MR} N^{M,R}(b),$$

so daß man aus den ersten Verkettungsgleichungen, aus der Definition (i) der $b_{L^\varepsilon M}$ und den schon bewiesenen Normierungsrelationen auf alle Gleichungen $N_c^{L^\varepsilon M,R}(b) = 1$ schließen kann.

Damit ist Satz 8 bewiesen.

§ 7. Lösung des Erweiterungsproblems bei 2-Gruppe $\mathfrak{A}$ und bizyklischem Γ.

Wie Faddeev [2] durch ein Gegenbeispiel gezeigt hat, trifft in dem jetzt vorliegenden Fall die Vermutung (V.) nicht mehr zu. Es wird sich jedoch zeigen, daß eine eingeschränkte Vermutung ($\hat{\text{V}}$.) den Verhältnissen gerecht wird, bei der über die bloße Existenz eines Verkettungssystems hinaus noch vorausgesetzt wird, daß dieses bestimmten zusätzlichen Bedingungen genügt, und zwar werden diese zusätzlichen Bedingungen nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig für die Lösbarkeit der Erweiterungsaufgabe sein.

Die Lösung der Erweiterungsaufgabe verlangt, aus einem Verkettungssystem $\hat{b}_{\chi,S}$ eine Lösung b_S, c von (G) zu konstruieren. Nach dem Reduktionssatz 8 genügt dazu im vorliegenden Fall die Konstruktion einer Lösung b_U, b_L, b_M, c von $(\bar{G})$.

Wie zu Anfang von § 4 noch einmal gesagt wurde, muß sich dazu $\hat{b}_{\chi,S}$ (durch Übergang zu Assoziierten) zu einem geeigneten c normieren lassen. Dabei wird sich hier wieder die Beschränkung auf die Grundklasse $\mathfrak{K}$, also auf die Normierungsrelationen (N), rechtfertigen. Von den Normierungsrelationen, in denen c gar nicht auftritt, mögen die folgenden hervorgehoben werden:

$$(R)\quad \begin{cases} N^{U,L}(b) \equiv b_{\varphi,U}^{-[L]}\, b_U^{L} = 1 \\ N^{U,M}(b) \equiv b_{\varphi,U}^{-[M]}\, b_U^{\overline{M}} = 1 \\ N^{M,M}(b) \equiv b_{\varphi,M}^{-[M]}\, b_M^{\overline{M}} = 1, \end{cases} \qquad \frac{N^{M,L}}{N^{L,M^L}}(b) \equiv \frac{b_{\varphi,M}^{-[L]}\, b_M^{L}}{b_{\varphi,L}^{-[M^L]}\, b_L^{\overline{M}^L}} = 1,$$

die zusammen mit den ersten Verkettungsgleichungen (V) im vorliegenden Fall das in der Einleitung genannte Gleichungssystem $(\hat{V}) = (V) \cup (R)$ bilden. In (R) kann man, unter Voraussetzung der ersten Verkettungsgleichungen $(V_{\mathfrak{K}})$ zur Grundklasse, $N^{U,M}(b) = 1$ und $N^{M,M}(b) = 1$ zusammenfassen zu

$$N^{P,M}(b) = 1 \text{ für } P \text{ aus } \{\mathfrak{U}, M\}.$$

Ferner läßt sich die in (R) rechts stehende Relation in unwesentlicher Verschärfung von (R) ersetzen durch

$$N^{M,L}(b) \equiv b_{\varphi,M}^{-[L]}\, b_M^{L} = 1, \quad N^{L,M}(b) = b_{\varphi,L}^{-[M]}\, b_L^{\overline{M}} = 1.$$

Und schließlich ist $(\hat{V})$ gleichbedeutend mit dem Gleichungssystem, das aus (V) und

$$(\bar{R})\qquad \frac{G^{U,L}}{G^{L,U^L}}(b) = 1, \quad \frac{G^{U,M}}{G^{M,U^M}}(b) = 1, \quad G^{M,M}(b) = 1, \quad K(b) = 1,$$

besteht, d. h. ausdenjenigen reduzierten Grundverkettungsgleichungen, in denen c nicht auftritt. Das folgt aus den nach dem Äquivalenzsatz für ein Verkettungssystem $b_{\varphi,S}$ gültigen Beziehungen

$$\frac{G^{U,L}}{G^{L,U^L}}(b) = N^{U,L}(b), \quad \frac{G^{U,M}}{G^{M,U^M}}(b) = N^{U,M}(b), \quad G^{M,M}(b) = N^{M,M}(b),$$

$$K(b) = \frac{G^{M,L}}{(G^{L,M})^{[L,M]}\, G^{LM,[L,M]}}(b) = \frac{N^{M,L}}{(N^{L,M})^{[L,M]}}(b) = \frac{N^{M,L}}{N^{L,M^L}}(b).$$

Ein Verkettungssystem $\hat{b}_{\chi,S}$ sei *regulär* genannt, wenn das in ihm enthaltene Verkettungssystem $\hat{b}_{\varphi,S}$ zur Grundklasse $\mathfrak{K}$ den Normierungsrelationen (R) oder, damit gleichbedeutend, den Gleichungen $(\bar{R})$ genügt. Wenn das Erweiterungsproblem $\mathfrak{E}$, oder

also das Gleichungssystem (W), eine Lösung besitzt, gibt es sicherlich ein reguläres Verkettungssystem. Wenn es umgekehrt ein Verkettungssystem, also eine Lösung von (V) gibt, so sind jedenfalls die in (R) links stehenden Gleichungen nach Satz 4 durch ein Verkettungssystem lösbar. Das Gegenbeispiel von Faddeev [2] aber lehrt, daß daraus noch nicht die Lösbarkeit des vollen Systems $(\hat{V})$ folgt. Deshalb ist die Vermutung (V.) für den vorliegenden bizyklischen Fall wie folgt einzuschränken:

($\hat{\text{V}}$.) *Zu jeder regulären, d. h. den Relationen (R) genügenden Lösung $b_{\chi,S}$ der ersten Verkettungsgleichungen (V) existiert eine Lösung $c_{\chi,\chi'}$ von (W).*

Gibt es ein reguläres Verkettungssystem für $\mathfrak{E}$, so brauchen nicht alle Verkettungssysteme für $\mathfrak{E}$ regulär zu sein. Vielmehr drückt sich die Tatsache, daß es ein reguläres Verkettungssystem gibt, bei dem beliebigen Verkettungssystem $b_{\chi,S}$ darin aus, daß es zwei Elemente a_L, a_M aus Ω mit der Eigenschaft

$$(\mathfrak{R})\quad \begin{cases} N^{U,L}(b) = a_L^{(U-1)L} \\ N^{P,M}(b) = a_M^{(P-1)M} \end{cases} \text{für } P \text{ aus } \{\mathfrak{U}, M\}, \qquad \frac{N^{M,L}}{N^{L,M^L}}(b) = \frac{a_L^{(\bar{M}-1)L}}{a_M^{M(\bar{L}-1)}}$$

gibt. Das folgt aus den für zwei beliebige Systeme $b_{\psi,S}$ und $\hat{b}_{\psi,S} = a_\psi^{[S]-1} b_{\psi,S}$ gültigen Relationen

$$N^{U,L}\left(\frac{\hat{b}}{b}\right) = \left(a_{\varphi^\lambda} a_\varphi^{-\mathfrak{r}(\lambda)}\right)^{(1-U)L} \qquad \frac{N^{M,L}}{N^{L,M^L}}\left(\frac{\hat{b}}{b}\right) = \frac{\left(a_{\varphi^\lambda} a_\varphi^{-\mathfrak{r}(\lambda)}\right)^{(1-\bar{M})L}}{\left(a_{\varphi^{-1}} a_\varphi\right)^{M(1-\bar{L})}}.$$
$$N^{P,M}\left(\frac{\hat{b}}{b}\right) = \left(a_{\varphi^{-1}} a_\varphi\right)^{(1-P)M},$$

Daß diese eingeschränkte Vermutung ($\hat{\text{V}}$.) in der Tat zutrifft, daß also die Existenz eines regulären Verkettungssystems auch hinreichend für die Lösbarkeit der Erweiterungsaufgabe ist, ja daß sogar, wie im Fall „Γ zyklisch mit (Z.)", die Existenz eines regulären Verkettungssystems zur Grundklasse $\mathfrak{K}$ genügt, wird in Analogie zu Satz 6 durch den folgenden Satz festgestellt:

Satz 9. *Ist $\mathfrak{A}$ zyklisch von 2-Potenzordnung n und Γ vom bizyklischen Typus $(e, 2)$ mit zweiter Erzeugenden $-1 \bmod n$, so folgt aus der Lösbarkeit der ersten Verkettungsgleichungen $(V_{\mathfrak{K}})$ zur Grundklasse $\mathfrak{K}$ nebst Normierungsrelationen (R) die Lösbarkeit der Grundverkettungsgleichungen (G) und damit des Erweiterungsproblems $\mathfrak{E}$.*

Genauer: Ist $\hat{b}_{\psi,S}$ eine Lösung von $(V_{\mathfrak{K}})$, (R) — also ein reguläres Verkettungssystem zu $\mathfrak{K}$ — so erhält man aus den speziellen Grundelementen $\hat{b}_U$, $\hat{b}_L$, $\hat{b}_M$ in der Form

$$\left.\begin{aligned} b_U = \hat{b}_U^{\mathfrak{m}'\mathfrak{m}^e(\lambda)}, \quad b_L = \hat{b}_L^{\mathfrak{m}'\mathfrak{m}^e(\lambda)}, \quad b_M = \hat{b}_M^{\mathfrak{m}'\mathfrak{m}^e(\lambda)} \\ c = \left(\hat{b}_{L^e}^{-1}\, \hat{b}_L'^{(\bar{L})}\right)^{L-e_{\mathfrak{m}'}} \end{aligned}\right\} \textit{mit } \mathfrak{m}'\mathfrak{m}^e(\lambda) \equiv 1 \bmod n$$

eine Lösung b_U, b_L, b_M, c der reduzierten Grundverkettungsgleichungen $(\bar{G})$, die sich dann nach Satz 8 eindeutig zu einer Lösung b_S, c der vollen Grundverkettungsgleichungen (G) fortsetzt.

Beweis. Es ist zu zeigen, daß aus den Gleichungen $(V_{\mathfrak{K}})$, (R), $(\bar{R})$ für die $\hat{b}_{\psi,S}$ bei der angegebenen Definition der b_U, b_L, b_M, c die Gleichungen $(\bar{1}^*)$, $(1^{\mathfrak{U},M})$, (1^{M^λ}), $(K^{L,M})$, $(\bar{2}^*)$, (2^M) für die b_U, b_L, b_M, c folgen.

Hinsichtlich $(\bar{1}^*)$, $(\bar{2}^*)$ ist das bereits in Satz 6 (und der darauf folgenden Bemerkung) festgestellt. Die Gleichungen $(1^{\mathfrak{U},M})$, (1^{M^λ}), $(K^{L,M})$ folgen ferner direkt aus den voraus-

gesetzten Gleichungen $(\overline{R})$ für die $\hat{b}_{\varphi,S}$ durch Potenzierung mit $\mathfrak{m}'\mathfrak{m}^e(\lambda)$. Demnach bleibt nur noch die Gleichung

$$(2^M) \qquad b_M^n = c^{\overline{M}-1}$$

zu bestätigen.

Dazu wird mehrfach die Kommutatorbeziehung $[L^e, M] = [L, M]\,[L^{e-1}, M]^L$ benutzt. — Nach Definition von c ist

$$c^{\overline{M}-1} = \left(\frac{\hat{b}_L^{f_e(\bar{L})L^{-e}(\overline{M}-1)}}{\hat{b}_{L^e}^{L^{-e}(\overline{M}-1)}}\right)^{\mathfrak{m}'}.$$

Der Exponent von $\hat{b}_L$ wird wegen $L^{-\alpha}(\overline{M}-1) = (\overline{M}[L^\alpha, M]-1)\,L^{-\alpha}$

$$f_e(\bar{L})L^{-e}(\overline{M}-1) = \sum_{\alpha=1}^{e}(\overline{M}[L^\alpha, M]-1)\,\bar{L}^{e-\alpha}L^{-e}$$

$$= (\overline{M}[L, M]-1)\sum_\alpha [L^{\alpha-1}, M]^L\bar{L}^{e-\alpha}L^{-e} + \sum_\alpha([L^{\alpha-1}, M]^L-1)\,\bar{L}^{e-\alpha}L^{-e}.$$

Nun ist wegen der letzten und ersten Relationen aus $(\overline{R})$ für $\hat{b}$

$$\hat{b}_L^{\overline{M}[L,M]-1} = \frac{\hat{b}_M^{\bar{L}-[L,M]}}{\hat{b}_{[L,M]}}, \quad \hat{b}_L^{[L^{\alpha-1},M]^L-1} = \frac{\hat{b}_{[L^{\alpha-1},M]}^{\bar{L}}}{\hat{b}_{[L^{\alpha-1},M]^L}}.$$

Nach den ersten Verkettungsgleichungen (1^{II}) für $\hat{b}$, die den obengenannten Kommutatorbeziehungen entsprechen, ergibt dies

$$c^{\overline{M}-1} = \left(\frac{\hat{b}_M^{(\bar{L}-[L,M])\sum_\alpha[L^{\alpha-1},M]^L\bar{L}^{e-\alpha}}}{\hat{b}_{L^e}^{L^{-e}(\overline{M}-1)L^e}}\;\frac{\prod_\alpha \hat{b}_{[L^{\alpha-1},M]}^{\bar{L}^{e-(\alpha-1)}}}{\prod_\alpha \hat{b}_{[L^\alpha,M]}^{\bar{L}^{e-\alpha}}}\right)^{L^{-e}\mathfrak{m}'}.$$

und weiter

$$c^{\overline{M}-1} = \left(\frac{\hat{b}_M^{\bar{L}^e-[L^e,M]}}{\hat{b}_{[L^e,M]}\,\hat{b}_{L^e}^{\overline{M}[L^e,M]-1}}\right)^{L^{-e}\mathfrak{m}'} = \hat{b}_M^{n\mathfrak{m}^e(\lambda)\mathfrak{m}'}\left(\frac{\hat{b}_M^{L^e}\hat{b}_{L^e}}{\hat{b}_{[L^e,M]}(\hat{b}_{L^e}^{\overline{M}}\hat{b}_M)^{[L^eM]}}\right)^{L^{-e}\mathfrak{m}'}.$$

Der zweite Faktor wird wegen $N^{U,M}(\hat{b}) = 1$ und nach den ersten Verkettungsgleichungen für $\hat{b}$

$$\frac{\hat{b}_{ML^e}}{\hat{b}_{[L^e,M]}\,\hat{b}_{L^eM}^{[L^e,M]}} = 1.$$

Nach Definition von b_M ergibt dies die Behauptung (2^M).

Damit ist Satz 9 bewiesen.

Schlußbemerkung. Die in der Einleitung genannte Gruppe $\mathfrak{a}$ besteht aus den Transformationen

$$b_{\chi,S} \to b_{\chi,S}\,a_\chi^{[S]-1}, \quad c_{\chi,\chi'} \to c_{\chi,\chi'}\,\frac{a_\chi a_{\chi'}}{a_{\chi\chi'}}.$$

Das Gleichungssystem $(\hat{V})$ und die Gruppe $\hat{\mathfrak{a}}$ nehmen in den drei behandelten Fällen die folgende Form an:

In § 4 besteht $(\hat{V})$ aus (V) und den Normierungsrelationen

$$N^{U,L}(b) = 1.$$

$\hat{\mathfrak{a}}$ ist die Untergruppe von $\mathfrak{a}$, die durch

$$(a_{\varphi\lambda}\, a_{\varphi}^{-\mathfrak{r}(\lambda)})^{1-U} = 1$$

charakterisiert ist.

In § 5 besteht $(\hat{V})$ aus (V) und den Normierungsrelationen (N), (K), und $\hat{\mathfrak{a}}$ ist die Untergruppe von $\mathfrak{a}$, die durch

$$(a_{\varphi^{-1}}\, a_{\varphi})^{1-S} = 1, \quad (a_{\varphi}^{-1}\, a_{\varphi}^{\tilde{n}})^{1-U} = 1$$

charakterisiert ist.

In § 7 besteht $(\hat{V})$ aus (V) und den Normierungsrelationen (R) mit der dort genannten Zusammenfassung

$$N^{P,M}(b) = 1 \text{ für } P \text{ aus } \{\mathfrak{U}, M\}.$$

$\hat{\mathfrak{a}}$ ist die Untergruppe von $\mathfrak{a}$, die durch

$$\begin{aligned} (a_{\varphi\lambda}\, a_{\varphi}^{-\mathfrak{r}(\lambda)})^{1-U} &= 1 \qquad \frac{(a_{\varphi\lambda}\, a_{\varphi}^{-\mathfrak{r}(\lambda)})^{(1-\overline{M})L}}{(a_{\varphi^{-1}}\, a_{\varphi})^{M(1-L)}} = 1 \\ (a_{\varphi^{-1}}\, a_{\varphi})^{1-P} &= 1, \end{aligned}$$

charakterisiert ist.

Literatur.

[1] *B. N. Delaunay* and *D. K. Faddeieff* (Delone und Faddeev), Investigations in the geometry of the Galois theory [russ. mit engl. Zs.fssg.]. Mat. Sbornik, n. Ser. **15**, 243—284 (1944), insbes. S. 275f.

[2] *D. K. Faddeev*, Über eine Vermutung von Hasse [russ.]. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **94**, 1013—1016 (1954).

[3] *H. Hasse*, Invariante Kennzeichnung relativ abelscher Zahlkörper mit vorgegebener Galoisgruppe über einem Teilkörper des Grundkörpers. Abh. Deutsche Akad. Wiss. Berlin, math. naturw. Kl. **1947**, Nr. 8 (1949), insbes. S. 32 und 44.

[4] *H. Hasse*, Existenz und Mannigfaltigkeit abelscher Algebren mit vorgegebener Galoisgruppe über einem Teilkörper des Grundkörpers. I, III. Math. Nachr. **1**, 40—61, 277—283 (1948).

[5] *R. Kochendörffer*, Zwei Reduktionssätze zum Einbettungsproblem für abelsche Algebren. Math. Nachr. **10**, 75—84 (1953).

Eingegangen 23. Februar 1955.

Invariante Divisorenscharen bei endlichen Gruppen von Cremonatransformationen.

Von *Wolfgang Engel* in Halle.

In der folgenden Arbeit sollen die invarianten linearen Divisorenscharen endlicher Gruppen von Cremonatransformationen bestimmt werden. Das Ergebnis ist in geometrischer Form in einer Arbeit von Wiman [11] zu finden, seine Herleitung findet sich in Arbeiten verschiedener Autoren [1]—[5], [9]—[11], so daß eine zusammenhängende Ableitung mit den hier verwendeten Mitteln einer Untersuchung wert zu sein scheint. Es wird sich zeigen, daß als invariante lineare Divisorenscharen nur endlich viele Typen existieren. Zur Reduktion der linearen Divisorenscharen verwenden wir die von Jung [6] angegebenen Vertauschungs- und Fundamentaltransformationen.

§ 1. Die Gruppe.

$K = K_0(x, y)$ sei der Körper der rationalen Funktionen in den beiden Veränderlichen x und y über dem Körper der komplexen Zahlen K_0. Ein Polynom aus K heiße vom Grad (λ, μ), wenn es in x vom Grad λ, in y vom Grad μ ist. Ein Automorphismus von K, bei dem K_0 festbleibt, heißt eine Cremonatransformation. Die unabhängigen Veränderlichen bezeichnen wir nach Ausführung des Automorphismus durch Striche, also x', y'. Der Automorphismus wird dann erzeugt durch

$$(1.1)\qquad x' = \frac{f_0(x, y)}{f_\infty(x, y)}, \quad y' = \frac{g_0(x, y)}{g_\infty(x, y)}, \quad x = \frac{f_0'(x', y')}{f_\infty'(x', y')}, \quad y = \frac{g_0'(x', y')}{g_\infty'(x', y')},$$

wo f und g Polynome sind.

Wir wollen hier endliche Gruppen von Cremonatransformationen betrachten. Eine solche Gruppe G bestehe aus den $r + 1$ Cremonatransformationen

$$(1.2)\qquad E = T_0, T_1, T_2, \ldots, T_r.$$

$h_0(x, y)$ sei eine Funktion aus K. Durch T_i gehe $h_0(x, y)$ über in h_i. Ist $T_k = T_j T_i$, so wird $h_0(x, y)$ durch T_i in $h_i(x, y)$ und dieses durch T_j in $h_k(x, y)$ transformiert. Die Cremonatransformationen von G bewirken also Permutationen der $h_\nu (\nu = 0, 1, 2, \ldots, r)$. Jede symmetrische Funktion der h_ν ist somit eine Invariante von G. Wir betrachten im besonderen die Funktion

$$(1.3)\qquad h = c_0 h_0 + c_1 h_1 + \cdots + c_r h_r$$

mit Unbestimmten c_ν $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, r)$, die wir K_0 adjungieren. Den Funktionen h_ν seien die Divisoren $\mathfrak{H}_\nu \mathfrak{Q}^{-1}$ zugeordnet, so daß die $\mathfrak{H}_\nu$ ganze Divisoren derselben Klasse $(\mathfrak{Q})$ sind. Es ist dann h der Divisor $\mathfrak{H}\mathfrak{Q}^{-1}$ zugeordnet, und $\mathfrak{H}$ ist ganzer Divisor aus $(\mathfrak{Q})$ mit $\mathfrak{H} \sim \mathfrak{L}^\lambda \mathfrak{M}^\mu$. Für (1.3) schreiben wir auch

$$(1.4)\qquad \mathfrak{H} = c_0 \mathfrak{H}_0 + c_1 \mathfrak{H}_1 + \cdots + c_r \mathfrak{H}_r$$

und nennen die durch (1. 4) bestimmten Divisoren die durch die $\mathfrak{H}_\nu$ erzeugte lineare Divisorenschar $\langle\mathfrak{H}\rangle$. Diese Schar ist, wie wir oben sahen, eine Invariante der Gruppe G. Wir wollen annehmen, daß ein allen Divisoren gemeinsamer Faktor schon abgespalten sei, so daß eine primitive Schar übrigbleibt. Ist diese Schar zerlegbar, d. h. besteht sie i. a. nicht aus Primdivisoren, so wollen wir das entsprechende Büschel von Primdivisoren betrachten ([7], S. 83).

Wie wir zeigen wollen, gilt folgender Satz:

Jede endliche Gruppe von Cremonatransformationen besitzt eine invariante lineare Divisorenschar $\langle\mathfrak{H}\rangle$ von Primdivisoren des Geschlechts 0 *oder* 1.

Die festen Stellen der Schar $\langle\mathfrak{H}\rangle$ seien durch eine einseitige Stellentransformation so weit aufgelöst, daß die neue Schar $\langle\mathfrak{H}^*\rangle$ keine festen Stellen mehr hat, also vollkommen primitiv ist. Der Körper K werde bei der neuen Stellendefinition mit K^* bezeichnet, K^* ist jedoch mit K identisch. Den Divisoren von K müssen Divisoren von K^* entsprechen, die wir durch einen Stern von den Divisoren von K unterscheiden. Es sei

$$(1.5)\qquad \mathfrak{H}^* = \frac{\mathfrak{H}}{s(\mathfrak{H})}, \quad s(\mathfrak{H}) = \mathfrak{a}_1^{\alpha_1}\mathfrak{a}_2^{\alpha_2}\cdots\mathfrak{a}_\varrho^{\alpha_\varrho}, \quad \mathfrak{K}^* = \mathfrak{K}\mathfrak{a}, \quad \mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1^{\delta_1}\mathfrak{a}_2^{\delta_2}\cdots\mathfrak{a}_\varrho^{\delta_\varrho}.$$

Dabei ist $\mathfrak{K}^*$ nicht der $\mathfrak{K}$ entsprechende, sondern ein Divisor der kanonischen Klasse $(\mathfrak{K}^*)$ von K^*, der durch obige Gleichung definiert wird ([7], S. 147). Die $\mathfrak{a}_i$ seien die ausgezeichneten Primdivisoren 2. Art von K, die in Primdivisoren 1. Art von K übergehen, und $\mathfrak{a}$ ist der zu den $\mathfrak{a}_i$ gehörige kanonische Divisor. Wegen $\mathfrak{K} = \mathfrak{L}^{-2}\mathfrak{M}^{-2}$ gilt

$$(1.6)\qquad \mathfrak{K}^* = \mathfrak{a}\mathfrak{L}^{-2}\mathfrak{M}^{-2}.$$

Hat $\langle\mathfrak{H}^*\rangle$ den Grad D, so ist

$$(1.7)\qquad D = (\mathfrak{H}^*, \mathfrak{H}^*) = (\mathfrak{H}, \mathfrak{H}) + \big(s(\mathfrak{H}), s(\mathfrak{H})\big) = (\mathfrak{L}^\lambda\mathfrak{M}^\mu, \mathfrak{L}^\lambda\mathfrak{M}^\mu) - \alpha\mathfrak{a}\dot{\alpha}.$$

Dabei bedeutet $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho)$ und $\mathfrak{a}$ die Matrix der Schnittzahlen $(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k)$. Setzen wir noch

$$(1.8)\qquad \mathfrak{a} = h\dot{h}, \quad q = \alpha h$$

([7], S. 157), so folgt

$$(1.9)\qquad D = 2\lambda\mu - q\dot{q} = 2\lambda\mu - \sum_{\nu=1}^{\varrho} q_\nu^2.$$

Da eine lineare Divisorenschar keine beweglichen mehrfachen Stellen hat, ist die kanonische Klasse des zu $\mathfrak{H}^*$ gehörenden Funktionenkörpers

$$(1.10)\qquad (\mathfrak{k}) = (\mathfrak{K}^*\mathfrak{H}^*) \text{ für } \mathfrak{H}^* = 0.$$

Wegen der Identität der zu den Primdivisoren $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}^*$ gehörenden Abbildungskörper ist ihr Geschlecht gleich, und zwar gleich dem Rang der Differentialklasse $(\mathfrak{k})$, also

$$p = \{\mathfrak{k}\}$$

und (s. [7], S. 86)

$$(1.11)\qquad 2p - 2 = (\mathfrak{H}^*, \mathfrak{H}^*\mathfrak{K}^*) = \left(\frac{\mathfrak{L}^\lambda\mathfrak{M}^\mu}{s(\mathfrak{H})}, \frac{\mathfrak{L}^{\lambda-2}\mathfrak{M}^{\mu-2}}{s(\mathfrak{H})\,\mathfrak{a}^{-1}}\right)$$

oder

$$(1.12)\qquad 2p - 2 = 2\lambda\mu - 2\lambda - 2\mu - \sum_{\nu=1}^{\varrho} q_\nu(q_\nu - 1).$$

Der Defekt der Klasse $(\mathfrak{K}^*\mathfrak{H}^*)$ in bezug auf $\mathfrak{H}^*$ ist nach Definition (s. [7], S. 89)

$$\omega_{\mathfrak{H}^*}(\mathfrak{K}^*\mathfrak{H}^*) = \{\mathfrak{k}\} - \{\mathfrak{K}^*\mathfrak{H}^*\} + \{\mathfrak{K}^*\} \geqq 0. \tag{1.13}$$

Für den Körper K^* ist $\{\mathfrak{K}^*\} = 0$ und damit

$$\{\mathfrak{K}^*\mathfrak{H}^*\} \leqq \{\mathfrak{k}\} = p. \tag{1.14}$$

Andererseits ist nach dem Riemann-Rochschen Satz ([7])

$$\{\mathfrak{K}^*\mathfrak{H}^*\} + \{\mathfrak{H}^{*-1}\} + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{K}^*\mathfrak{H}^*, \mathfrak{H}^{*-1}) \geqq p_a + 1. \tag{1.15}$$

Da für die Ebene $p_a = 0$ und nach (1.11) $(\mathfrak{K}^*\mathfrak{H}^*, \mathfrak{H}^*) = 2p - 2$ gilt, so folgt

$$\{\mathfrak{K}^*\mathfrak{H}^*\} \geqq p \tag{1.16}$$

und mit (1.14)

$$\{\mathfrak{K}^*\mathfrak{H}^*\} = p. \tag{1.17}$$

Also bilden die ganzen Divisoren von $(\mathfrak{K}^*\mathfrak{H}^*)$ für $p \geqq 2$ eine lineare Divisorenschar $\langle\mathfrak{H}^{(1)}\rangle$, die die Schar der zu $\langle\mathfrak{H}\rangle$ adjungierten ganzen Divisoren heißt. Für einen ganzen Divisor aus dieser Schar gilt

$$\mathfrak{H}^{(1)} = \mathfrak{K}^*\mathfrak{H}^* \sim \frac{\mathfrak{H}\mathfrak{a}}{s(\mathfrak{H})\,\mathfrak{L}^2\mathfrak{M}^2} \sim \frac{\mathfrak{L}^{\lambda-2}\mathfrak{M}^{\mu-2}}{\mathfrak{a}_1^{\alpha_1-\delta_1}\cdots\mathfrak{a}_\varrho^{\alpha_\varrho-\delta_\varrho}}. \tag{1.18}$$

Die ganzen Divisoren von $(\mathfrak{H}^*\mathfrak{K}^*)$ sind also die Zählerdivisoren von Polynomen in x, y vom Grade $(\lambda - 2, \mu - 2)$, die durch $\mathfrak{a}_1^{\alpha_1-\delta_1}\mathfrak{a}_2^{\alpha_2-\delta_2}\cdots\mathfrak{a}_\varrho^{\alpha_\varrho-\delta_\varrho}$ teilbar sind.

Da die Schar $\langle\mathfrak{H}\rangle$ invariant für Cremonatransformationen aus G ist, gilt dasselbe von der Schar $\langle\mathfrak{H}^{(1)}\rangle$ der zu $\langle\mathfrak{H}\rangle$ adjungierten ganzen Divisoren. Von dieser ausgehend kann man wieder die zugehörige Schar der adjungierten ganzen Divisoren bilden, die wieder invariant ist bei Cremonatransformationen aus G usw. Die Bildung der sukzessiven adjungierten Divisorenscharen $\langle\mathfrak{H}^{(i)}\rangle$ läßt sich fortsetzen, solange das Geschlecht $p^{(i)}$ des allgemeinen Primdivisors der Schar $\langle\mathfrak{H}^{(i)}\rangle$ größer oder gleich zwei ist. Da sich jedoch der Grad der den Divisoren entsprechenden Polynome bei jedem Reduktionsschritt um (2, 2) vermindert, kommen wir schließlich einmal zu den Fällen, in denen der Grad $(\lambda^{(i)}, \mu^{(i)})$ gleich ist

$$(2, 2) \text{ für } p^{(i)} \leqq 1;\ (\lambda, 1) \text{ für } \lambda \geqq 1,\ p^{(i)} = 0;\ (1, \mu) \text{ für } \mu > 1,\ p^{(i)} = 0. \tag{1.19}$$

Tritt der Fall ein, daß eine der Scharen $\langle\mathfrak{H}^{(i)}\rangle$ zerlegbar wird, z. B. wenn man auf Polynome des Grades $(\lambda, 0)$ oder $(0, \mu)$ $(\lambda > 1, \mu > 1)$ stößt, so behandelt man das Büschel aus Primdivisoren weiter, das diese Schar bildet. Sollte eine der Scharen imprimitiv werden, so kann man einen Faktor abspalten und den Rest weiterbehandeln.

Ist G eine Gruppe von Cremonatransformationen mit einer invarianten Divisorenschar $\langle\mathfrak{H}\rangle$, so hat die zu G isomorphe Gruppe TGT^{-1} (T sei eine Cremonatransformation) die aus $\langle\mathfrak{H}\rangle$ durch T entstehende lineare Divisorenschar $\langle\mathfrak{H}_T\rangle$ als Invariante; denn durch T^{-1} wird $\langle\mathfrak{H}_T\rangle$ in $\langle\mathfrak{H}\rangle$ transformiert, die bei G invariant ist und durch T wieder in $\langle\mathfrak{H}_T\rangle$ transformiert wird. Um daher die invarianten linearen Divisorenscharen aller nichtisomorphen Gruppen von Cremonatransformationen zu bestimmen, genügt die Aufzählung aller birational verschiedenen linearen Divisorenscharen der Geschlechter 0 und 1, da stets eine lineare Divisorenschar des Geschlechts 0 oder 1 vorhanden ist, wenn überhaupt eine existiert.

§ 2. Die Fundamentaltransformationen (Jung [6]).

Wir betrachten die speziellen Cremonatransformationen

$$(2.\ 1)\qquad \begin{aligned} &\text{VTr. } x' = y,\ y' = x,\\ &\text{FTr. } x' = x,\ y' = \frac{a\beta_2'(x-\alpha_1)(y-\beta_2) + b\beta_1'(x-\alpha_2)(y-\beta_1)}{a(x-\alpha_1)(y-\beta_2) + b(x-\alpha_2)(y-\beta_1)}. \end{aligned}$$

oder auch die inversen Cremonatransformationen

$$(2.\ 2)\qquad \begin{aligned} &\text{VTr. } x = y',\ y = x'\\ &\text{FTr. } x = x',\ y = \frac{a\beta_2(x'-\alpha_1)(y'-\beta_2') + b(x'-\alpha_2)(y'-\beta_1')}{a(x'-\alpha_1)(y'-\beta_2') + b(x'-\alpha_2)(y'-\beta_1')}. \end{aligned}$$

Die ausgezeichneten Stellen von (2. 1) sind (α_1, β_1) und $(\alpha_2\ \beta_2)$, für (2. 2) sind es (α_1, β_1'), (α_2, β_2'). Wir können $\mathfrak{H} \sim \mathfrak{L}^\lambda \mathfrak{M}^\mu$ mit $\lambda \geqq \mu$ annehmen, was durch eine VTr. stets zu erreichen ist. Wenden wir auf $\langle\mathfrak{H}\rangle$ eine FTr. an, deren ausgezeichnete Stellen mit festen Stellen von $\langle\mathfrak{H}\rangle$ zusammenfallen, so erhalten wir eine Schar $\langle\mathfrak{H}'\rangle$ mit $\mathfrak{H}' \sim \mathfrak{L}'^{\lambda'} \mathfrak{M}'^{\mu'}$ und

$$(2.\ 3)\qquad \lambda' = \lambda + \mu - (q_1 + q_2),\ \mu' = \mu,\ q_\nu' = \mu - q_\nu \qquad (\nu = 1, 2).$$

Hier sind q_1, q_2 bzw. q_1', q_2' die Vielfachheiten der zu den festen Stellen von $\langle\mathfrak{H}\rangle$ bzw. $\langle\mathfrak{H}'\rangle$ gehörenden Stellen nullter Ordnung Q_1, Q_2 bzw. Q_1', Q_2'. (Eine Stelle i. Ordnung erhält man durch eine Elementartransformation aus einer Stelle $(i-1)$. Ordnung. Die Stelle nullter Ordnung ist diejenige, von der man ausgeht; s. auch Jung [6], [7].)

Man kann

$$(2.\ 4)\qquad 1 \leqq q_\nu \leqq \mu$$

annehmen, da wir nur feste Stellen als ausgezeichnete Stellen einer FTr. wählen wollen und die Schar $\langle\mathfrak{H}\rangle$ unzerlegbar sein soll. Ferner sei die Bezeichnung so gewählt, daß

$$(2.\ 5)\qquad q_1 \geqq q_\nu$$

ist, so daß die zu q_1 gehörende Stelle von der nullten Ordnung ist.

Durch eine Folge von VTr. und FTr. kommt man, wie Jung gezeigt hat [6], zu einer Schar $\langle\mathfrak{H}\rangle$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $$\lambda \geqq \mu \geqq 0.$$

2. $\langle\mathfrak{H}\rangle$ hat l getrennt liegende feste Stellen P_i der Multiplizität μ, für die $y = 0$ ist und die bewegliche Tangenten haben.

3. $\langle\mathfrak{H}\rangle$ hat ϱ feste Stellen Q_i der Multiplizität q_i, die nicht getrennt zu liegen brauchen und für die

$$(2.\ 6)\qquad 1 \leqq q_i \leqq \frac{\mu}{2}$$

ist. Dabei kann das letzte Gleichheitszeichen nur eintreten, wenn für eine Stelle Q_i entweder $y = 0$ oder $l = 0$ ist. Im ersten Fall ist dann

$$(2.\ 7)\qquad \lambda \geqq l\mu + q_i.$$

4. Es ist nicht möglich, durch eine FTr. zu erreichen, daß die erste Gradzahl kleiner als die zweite wird.

Für die Divisoren dieser Schar, die i. a. Primdivisoren sein sollen, lauten die Gleichungen (1. 9) bzw. (1. 12) unter Berücksichtigung der Stellen P_i

$$(2.8) \qquad (\mathfrak{H}, \mathfrak{H}) = 2\lambda\mu = \sum_{\nu=1}^{\varrho} q_\nu^2 + l\mu^2 + D,$$

$$(2.9) \qquad 2p = 2(\lambda - 1)(\mu - 1) - \sum_{\nu=1}^{\varrho} q_\nu(q_\nu - 1) - l\mu(\mu - 1),$$

aus denen noch folgt

$$(2.10) \qquad 2(\lambda + \mu) - l\mu - \sum_{\nu=1}^{\varrho} q_\nu^2 + 2p - 2 - D = 0.$$

3. Die Typen der linearen Divisorenscharen aus Primdivisoren des Geschlechts 0.

Jede lineare Divisorenschar aus Primdivisoren des Geschlechts 0 *läßt sich durch Cremonatransformationen auf eine lineare Divisorenschar folgender Arten zurückführen*:

a. $\lambda = 1, \quad \mu = 0, \quad l = 0, \quad \varrho = 0, \quad D = 0;$

b. $2\lambda = l + D, \quad \mu = 1, \quad l \leqq \lambda, \quad \varrho = 0;$

c. $\lambda = 2, \quad \mu = 2, \quad l = 1, \quad \varrho = 0, \quad D = 4.$

Für $\mu = 0$ folgt $\varrho = 0$, $D = 0$ aus (2. 8) und $\lambda = 1$ aus (2. 10), also liegt der Fall a. vor.

Auch für $\mu = 1$ ist wegen $1 \leqq q_i \leqq \frac{\mu}{2}$ die Zahl ϱ der festen Stellen Q_i gleich 0 und (2. 10) ergibt den Fall b.

Nun nehmen wir an, daß $\mu \geqq 2$ sei. Aus (2. 8) und (2. 10) folgt dann für $p = 0$

$$(3.1) \qquad \lambda(\mu - 2) + \mu(\lambda - l\mu) + \mu(l - 2) + 2 - \sum_{\nu=1}^{\varrho} q_\nu(q_\nu - 1) = 0$$

Zunächst sei $\varrho = 0$, also

$$(3.2) \qquad \lambda(\mu - 2) + \mu(\lambda - l\mu) + \mu(l - 2) + 2 = 0.$$

Da für $l \geqq 2$ auf der linken Seite dieser Gleichung nur positive Glieder oder Nullen stehen, so muß $l \leqq 1$ sein. Für $\mu = 2$, $\lambda = l + 1$ ist nur $\lambda = 2$, $l = 1$, $D = 4$, also c. eine Lösung. $\mu \geqq 3$ ergibt keine weitere Lösung, da

$$\lambda(\mu - 2) + \mu(\lambda - l\mu) + \mu(l - 2) + 2 \geqq 2$$

ist. Jetzt sei $\varrho > 0$. Die Stellen Q_i denken wir uns so numeriert, daß $q_1 \geqq q_2 \geqq \cdots \geqq q_\varrho$ ist, so daß folgende Ungleichung gilt:

$$(3.3) \qquad (q_\varrho - 1)\sum_{\nu=1}^{\varrho} q_\nu \leqq \sum_{\nu=1}^{\varrho} q_\nu(q_\nu - 1) \leqq (q_1 - 1)\sum_{\nu=1}^{\varrho} q_\nu.$$

Damit wird aus (3. 1)

$$2\lambda\mu - 2\lambda - 2\mu - l\mu^2 + l\mu + 2 \leqq (q_1 - 1)\sum_{\nu=1}^{\varrho} q_\nu$$

oder

$$(3.4) \qquad \lambda(\mu - 2q_1) + \mu(\lambda - l\mu) + \mu q_1(l - 2) + (q_1 - 1)(D + 2) + 2 \leqq 0.$$

In dieser Ungleichung gilt das Gleichheitszeichen nur für

$$q_1 = q_2 = \cdots = q_\varrho.$$

Wegen (2. 6) ist $\mu \geqq 2q_1$ und wegen (2. 7) $\lambda \geqq l\mu$. Aus (3. 4) folgt daher $l < 2$. Nun untersuchen wir die einzelnen Fälle.

Es sei $l = 0$. Dann wird (3. 4) zu

$$\lambda(\mu - 2q_1) + \mu(\lambda - 2q_1) + (q_1 - 1)(D + 2) + 2 \leqq 0. \tag{3. 5}$$

Wegen $\lambda \geqq \mu \geqq 2q_1$, $q_1 \geqq 1$ kann diese Ungleichung nicht erfüllt werden.

Nun sei $l = 1$. Dann erhalten wir aus (3. 4)

$$\lambda(\mu - 2q_1) + \mu(\lambda - \mu - q_1) + (q_1 - 1)(D + 2) + 2 \leqq 0. \tag{3. 6}$$

Angenommen, für Q_1 sei $y = 0$, so daß $\lambda \geqq \mu + q_1$ ist. (3. 6) ist dann nicht zu erfüllen. Also bleibt nur $\lambda < \mu + q_1$ und damit ist wegen $l = 1$, $\mu > 2q_1$ für Q_1 der Wert $y \neq 0$. Es läßt sich dann eine Fundamentaltransformation mit den ausgezeichneten Stellen P_1, Q_1 ausführen, die zu den neuen Gradzahlen

$$\lambda' = \lambda + \mu - (q_1 + \mu) = \lambda - q_1, \quad \mu' = \mu$$

führt. Die Stelle P_1 geht dabei in eine Stelle der Multiplizität 0 über. Damit ist jetzt $l = 0$. Nach einer Vertauschungstransformation erhalten wir eine Schar mit

$$\lambda'' = \mu' = \mu, \quad \mu'' = \lambda' = \lambda - q_1$$

und $\lambda'' > \mu''$, $l = 0$ wegen $\lambda < \mu + q_1$. Von einer solchen hatten wir aber eben festgestellt, daß sie nicht existieren kann.

§ 4. Die Typen der linearen Divisorenscharen aus Primdivisoren des Geschlechts 1.

Jede lineare Divisorenschar aus Primdivisoren des Geschlechts 1 läßt sich durch Cremonatransformationen auf eine lineare Divisorenschar folgender Arten zurückführen:

d. $\lambda = 4$, $\mu = 2$, $l = 2$, $\varrho = 0$, $D = 8$;
e. $\lambda = 3$, $\mu = 2$, $l = 1$, $\varrho = 0$, $D = 8$;
f. $\lambda = \mu = 2$, $l = 0$, $\varrho + D = 8$, $q_i = 1$, $1 \leqq \varrho \leqq 6$;
g. $\lambda = \mu = 2\nu$, $l = 0$, $\varrho = 8$, $D = 0$, $q_i = \nu$;
h. $\lambda = \mu = 3$, $l = 1$, $\varrho = 0$, $D = 9$;
i. $\lambda = 3$, $\mu = 2$, $l = 1$, $\varrho = 1$, $D = 7$.

Die Gleichungen (2. 8) und (2. 10) lauten für $p = 1$:

$$2(\lambda + \mu) - l\mu - \sum_{\nu=1}^{\varrho} q_\nu - D = 0, \tag{4. 1}$$

$$\lambda(\mu - 2) + \mu(\lambda - l\mu) + \mu(l - 2) - \sum_{\nu=1}^{\varrho} q_\nu(q_\nu - 1) = 0. \tag{4. 2}$$

Für $\mu = 0$ erhält man $\lambda = 0$ aus (4. 1), für $\mu = 1$ findet man in derselben Gleichung einen Widerspruch. Also können wir $\mu \geqq 2$ annehmen.

Zuerst sei wieder $\varrho = 0$. Dann gilt

$$\lambda(\mu - 2) + \mu(\lambda - l\mu) + \mu(l - 2) = 0. \tag{4. 3}$$

Um diese Gleichung zu erfüllen, muß $l \leqq 2$ sein. Zunächst betrachten wir den Fall $\mu = 2$ mit $\lambda = l + 2$ (nach (4. 3)) und erhalten

(d.) $\lambda = 2$, $l = 0$, $D = 8$;
e. $\lambda = 3$, $l = 1$, $D = 8$;
d. $\lambda = 4$, $l = 2$, $D = 8$.

Der Fall (d.) läßt sich durch eine Fundamentaltransformation mit zwei beliebigen ausgezeichneten Stellen der Multiplizität 0 in den Fall d. überführen; denn nach einer solchen ist $\lambda' = 2 + 2 - 0 = 4$, $\mu' = 2$, $l = 2$. Nun sei $\mu = 3$, $2\lambda = 3l + 3$. Da $2\lambda \geqq 6l$ sein muß, ist $l \leqq 1$ und wir finden

h. $\lambda = 3,\ l = 1,\ D = 9,$

während $l = 0$, $\lambda = \frac{3}{2}$ sinnlos ist. Für $\mu \geqq 4$ ist

$$\lambda(\mu - 2) + \mu(\lambda - l\mu) + \mu(l - 2) \geqq 4.$$

Die Fälle mit $\varrho > 0$ seien jetzt untersucht. Wir machen dieselben Voraussetzungen wie bei $p = 0$, $\varrho > 0$ und erhalten die Ungleichungen

$$\lambda(\mu - 2) + \mu(\lambda - l\mu) + \mu(l - 2) \leqq (q_1 - 1)\sum_{\nu=1}^{\varrho} q_\nu,$$

$$\lambda(\mu - 2q_1) + \mu(\lambda - l\mu) + \mu q_1(l - 2) + (q_1 - 1)\,D \leqq 0. \tag{4. 4}$$

Um (4. 4) zu erfüllen, muß $l \leqq 2$ sein.

Wir betrachten die Fälle mit $l = 0$:

$$\lambda(\mu - 2q_1) + \mu(\lambda - 2q_1) + (q_1 - 1)\,D \leqq 0.$$

In dieser Relation kann nur das Gleichheitszeichen gelten, also ist $\mu = 2q_1$, $q_1 = q_2 = \cdots = q_\varrho$ notwendig, und wir haben, da wegen $p = 1$ im Fall f. für $\varrho = 7$ eine 8. Stelle mitbestimmt ist,

f. $\lambda = 2,\quad \mu = 2,\quad \varrho + D = 8,\qquad q_i = 1$ mit $1 \leqq \varrho \leqq 6$.
g. $\lambda = 2\nu,\ \mu = 2\nu,\ \varrho = 8,\ D = 0,\ q_i = \nu \geqq 1$.

Für $l = 1$ wird (4. 4) zu

$$\lambda(\mu - 2q_1) + \mu(\lambda - \mu - q_1) + (q_1 - 1)\,D \leqq 0.$$

Wie im entsprechenden Fall des § 3 kann für $\lambda < \mu + q_1$ die Schar durch Fundamentaltransformationen auf eine solche mit $l = 0$ reduziert werden. Also können wir $\lambda \geqq \mu + q_1$ voraussetzen und finden für $\mu = 2q_1$, $\lambda = 3q_1$, $q_1 = q_2 = \cdots = q_\varrho$:

$\lambda = 3,\quad \mu = 2,\quad \varrho + D = 8,\qquad q_i = 1$ mit $1 \leqq \varrho \leqq 8$,
$\lambda = 3\nu,\ \mu = 2\nu,\ \varrho = 8,\ D = 0,\ q_i = \nu$.

Wegen $\lambda = \mu + q_1$, $\mu = 2q_1$ ist $y = 0$ für Q_1, denn sonst könnte man die Schar vereinfachen. Für $\varrho > 1$ gibt es aber ein Q_i mit $y \neq 0$, so daß durch eine Fundamentaltransformation $l = 0$ erreicht werden kann. Es bleibt nur der Fall mit

i. $\lambda = 3,\ \mu = 2,\ \varrho = 1,\ D = 7,\ q_1 = 1$.

Zuletzt sei $l = 2$ angenommen:

$$\lambda(\mu - 2q_1) + \mu(\lambda - 2\mu) + (q_1 - 1)\,D \leqq 0.$$

Auch diese Relation kann nur so erfüllt werden, daß das Gleichheitszeichen gilt, also $\mu = 2q_1$, $\lambda = 4q_1$, $q_1 = q_2 = \cdots = q_\varrho$:

$q_1 = 1,\ \varrho + D = 4,$
$q_1 = \nu,\ \varrho = 8,\ D = 0.$

In beiden Fällen ist aber wegen $2q_1 = \mu$ für keine Stelle Q_i der Wert $y = 0$. Deshalb kann man durch eine Fundamentaltransformation stets erreichen, daß $l = 1$ wird, und man hat damit den schon behandelten Fall.

Literatur.

[1] *E. Bertini*, Ricerche sulle trasformazioni univoche. Ann. di Mat. (2) **8** (1877), S. 254—287.

[2] *G. B. Guccia*, Generalizzazione di un teorema di Noether. Rend. circ. mat. Palermo **1** (1884—87), S. 139—156.

[3] *G. B. Guccia*, Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono unicursali. Rend. circ. mat. Palermo **1** (1884—87), S. 165—168.

[4] *G. B. Guccia*, Sulla riduzione dei sistemi lineari. Rend. circ. mat. Palermo **1** (1884—87), S. 169—189.

[5] *G. B. Guccia*, Sopra un recente lavoro concernente la riduzione dei sistemi lineari di curve algebriche piane. Rend. circ. mat. Palermo **3** (1889), S. 233—235.

[6] *H. W. E. Jung*, Zusammensetzung von Cremonatransformationen der Ebene aus quadratischen Transformationen. J. reine angew. Math. **180** (1938), S. 97—109.

[7] *H. W. E. Jung*, Einführung in die Theorie der algebraischen Funktionen zweier Veränderlicher. Berlin 1951.

[8] *S. Kantor*, Theorie der endlichen Gruppen von eindeutigen Transformationen in der Ebene. Berlin 1895.

[9] *V. Martinetti*, Sopra i sistemi lineari di curve piane algebriche di genere uno. Rend. R. Ist. Lombardo (2) **20** (1887), S. 264—269.

[10] *M. Noether*, Über Flächen, welche Scharen rationaler Kurven besitzen. Math. Ann. **3** (1871), S. 161—227.

[11] *A. Wiman*, Zur Theorie der endlichen Gruppen von birationalen Transformationen der Ebene. Math. Ann. **48** (1897), S. 195—240.

Eingegangen 11. März 1955.

A Generalisation of Stirling's Formula.

By *W. K. Hayman* in Exeter.

1. Introduction. Stirling's formula

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}, \quad \text{as } n \to +\infty,$$

may be regarded as an asymptotic formula for the coefficients of the exponential function. The present paper arises out the attempt to find a corresponding asymptotic formula for the coefficients of more general classes of functions. For example let k be a positive integer, put

$$f_k(z) = 1 + (z-1)\, e^{z+\frac{1}{2}z^2+\cdots+\frac{1}{k}z^k},$$

and let $f_{k_1,k_2,\ldots,k_p}(z)$ be defined inductively by

$$f_{k_1,\ldots,k_p}(z) = f_{k_1}\{f_{k_2,\ldots,k_p}(z)\}. \tag{1. 1}$$

Professor Hall proposed to me the problem of obtaining asymptotic formulae for the coefficients of the functions (1. 1). Our method will cover these and more general cases.

We shall consider a class of functions

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n,$$

regular in $|z| < R$, where $0 < R \leqq \infty$, and real for real z, which we shall call *admissible*. It will be a consequence of our hypotheses that for any fixed positive n

$$\frac{f(r)}{r^n} \to +\infty, \quad \text{as } r \to R. \tag{1. 2}$$

Let

$$M(r, f) = \sup_{|z|=r} |f(z)|,$$

$$a(r) = \frac{d \log M(r)}{d(\log r)}, \quad b(r) = \frac{d\, a(r)}{d(\log r)}.$$

It follows from Hadamard's Convexity Theorem, that $a(r)$ is positive increasing and $b(r)$ nonnegative for $r > 0$. Also for every positive n

$$\frac{d}{d(\log r)} \log\left\{\frac{M(r)}{r^n}\right\} = a(r) - n.$$

From this and (1. 2) it follows that the minimum of $M(r)/r^n$ in $0 < r < R$ is given by

$$M_n = \frac{M(r_n)}{r_n^n}, \tag{1. 3}$$

where r_n is defined by the equation

$$a(r_n) = n. \tag{1. 4}$$

It follows from the Cauchy inequalities that

$$|a_n| \leqq M_n.$$

Our aim is to prove for admissible functions the more precise asymptotic relation

$$a_n \sim \frac{M_n}{\sqrt{2\pi b(r_n)}}, \text{ as } n \to +\infty. \tag{1.5}$$

This result is contained in Theorem I[1]).

2. Statement of the main result. To motivate (1. 5) we remark that for admissible functions we shall have

$$M(r, f) = f(r), \quad R_0 \leqq r < R, \tag{2.1}$$

where $R_0 < R$ (Theorem V). Thus we may use the definitions

$$a(r) = r\frac{f'(r)}{f(r)} = \frac{d(\log f(r))}{d(\log r)}, \tag{2.2}$$

$$b(r) = ra'(r) = r\frac{f'(r)}{f(r)} + r^2\frac{f''(r)}{f(r)} - r^2\left(\frac{f'(r)}{f(r)}\right)^2, \tag{2.3}$$

which are equivalent to those given above for $R_0 < r < R$.

We have for any fixed r as $\theta \to 0$,

$$\log f(re^{i\theta}) = \log f(r) + i\theta a(r) - \frac{\theta^2}{2} b(r) + O(\theta^3).$$

To obtain our results we shall suppose that for some function $\delta(r)$ defined in a range $R_0 < r < R$ to satisfy $0 < \delta(r) < \pi$, we have

$$f(re^{i\theta}) \sim f(r)\, e^{i\theta a(r) - \frac{1}{2}\theta^2 b(r)}, \quad \text{as } r \to R, \tag{2.4}$$

uniformly for $|\theta| \leqq \delta(r)$, while uniformly for $\delta(r) \leqq |\theta| \leqq \pi$,

$$f(re^{i\theta}) = \frac{o(f(r))}{\sqrt{b(r)}}, \quad \text{as } r \to R. \tag{2.5}$$

We shall also assume that

$$b(r) \to +\infty, \quad \text{as } r \to R. \tag{2.6}$$

Then if $r = r_n$ satisfies (1. 4), we shall be able to deduce from the Cauchy formula

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int_{-\pi}^{+\pi} f(re^{i\theta})\, e^{-in\theta} d\theta,$$

that as $n \to +\infty$,

$$a_n \sim \frac{f(r_n)}{2\pi r_n^n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}b(r)\theta^2} d\theta = \frac{f(r_n)}{r_n^n\sqrt{2\pi b(r_n)}} = \frac{M_n}{\sqrt{2\pi b(r_n)}}$$

by (2. 1) and (1. 3). This gives (1. 5).

To make this rough argument more precise we make the following

Definition. *Suppose that* $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ *is regular in* $|z| < R$, *where* $0 < R \leqq \infty$ *and that for some* $R_0 < R$ *we have*

$$f(r) > 0, \quad R_0 < r < R.$$

[1]) If $f(z) = e^z$, $a(r) = b(r) = \log M(r) = r$, $M_n = (e/n)^n$, and (1. 5) reduces to Stirling's Formula.

Let $a(r)$, $b(r)$ be defined as in (2. 2), (2. 3) *and satisfy* (2. 6). *Suppose further that $f(z)$ satisfies* (2. 4), (2. 5) *with some function $\delta(r)$, where $0 < \delta(r) < \pi$. Then $f(z)$ will be said to be* ***admissible*** *in $|z| < R$.*

Our basic result is

THEOREM I. *Suppose that $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ is admissible in $|z| < R$, and define $a_n = 0$, $n < 0$. Then we have as $r \to R$, uniformly for all integers n*

$$a_n r^n = \frac{f(r)}{\sqrt{2\pi b(r)}} \left\{ \exp\left[-\frac{(a(r)-n)^2}{2b(r)} \right] + o(1) \right\}.$$

Corollary I. *The function $a(r)$ is positive increasing in some range $r_0 \leqq r < R$, and*

$$b(r) = o[a(r)]^2, \quad \text{as } r \to R.$$

Cololllary II. *If r_n is defined by* (1. 4), *and $r_n > r_0$ then*

$$a_n \sim \frac{f(r_n)}{r_n^n \sqrt{2\pi b(r_n)}}, \quad \text{as } n \to +\infty.$$

Corollary III[2]). *If*

$$\mu(r) = \max_{0 \leq n < \infty} |a_n| r^n = a_{N(r)} r^{N(r)}$$

is the largest term in the series for $f(r)$ and $N(r)$ its index, then

$$\mu(r) \sim \frac{f(r)}{\sqrt{2\pi b(r)}}, \quad N(r) = a(r) + o[b(r)]^{\frac{1}{2}} \sim a(r),$$

as $r \to R$.

Corollary IV. *If r_n is defined as above, then r_n finally increases, $r_n \to R$, as $n \to +\infty$, and*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \sim \frac{a_n}{a_{n-1}} \sim r_n^{-1}, \quad \text{as } n \to +\infty.$$

3. Outline of further results. Before proving Theorem I, we indicate briefly the rest of the paper. We shall prove Theorem I and its Corollaries in sections 4, 5. Sections 6—12 will be taken up with the general study of admissible functions. Theorem II shows that for such functions the distribution of the partial sums of the series $f(r) = \sum_0^\infty a_n r^n$ is asymptotically Gaussian. Also for every positive integer k

$$f^{(k)}(r) \sim f(r)\,[a(r)]^k, \quad \text{as } r \to R.$$

(Theorem III). We shall then be able to prove (2. 1) (Theorem V).

In sections 11, 12 we prove that if $f(z), g(z)$ are admissible in $|z| < R$, so are $\exp\{f(z)\}$, (Theorem VI), $f(z)\,g(z)$ (Theorem VII). If further $P(z) = b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m$ is a real polynomial, then $f(z) + P(z)$ is admissible in $|z| < R$, and so are $P\{f(z)\}$ if $b_0 > 0$, and $f(z)\,P(z)$, provided $b_0 > 0$ if $R = +\infty$ and $P(R) > 0$ if $R < +\infty$ (Theorems VIII and IX).

The rest of the paper is devoted to giving three examples of classes of admissible functions. In Theorem X it is shown that a necessary and sufficient condition for

[2]) For less precise inequalities relating $M(r), N(r), \mu(r)$ in more general cases, see *A. Wiman*, Acta Mathematica 37 (1914), 305—326, and *G. Valiron*, Lectures on the General Theory of Integral Functions, Chelsea 1949, Chapters II, IV.

$f(z) = \exp\{P(z)\}$ to be admissible in the plane, where $P(z)$ is a real polynomial, is that $f(z)$ attains its maximum modulus only on the positive real axis for large r. From this and the preceding work it follows that all the functions (1. 1) are admissible.

In Theorem XI we show that integral functions of genus zero and positive for large positive z are admissible if they satisfy (2. 6) and have only a finite number of zeros in some angle $|\arg z| \leq \alpha$, where $\alpha > \frac{\pi}{2}$. We deduce an asymptotic formula for the coefficients of Riemann's funktion $\zeta(t)$. We next describe in contrast the behaviour of the function

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}},$$

of genus 1, whose coefficients have oscillatory character.

Finally we give some examples of functions admissible in the unit circle, which includes for instance

$$f(z) = e^{C\left(\frac{1+z}{1-z}\right)} = \sum_{0}^{\infty} A_n z^n,$$

whose coefficients are maximal subject to $|f(0)| = e^C$ and $|f(z)| > 1$ in $|z| < 1$, and satisfy[3])

$$A_n \sim \left\{\frac{C}{8\pi^2 n^3}\right\}^{\frac{1}{4}} e^{(8nC)^{\frac{1}{2}}}, \quad \text{as } n \to +\infty$$

(Theorems XII and XIII).

4. Proof of Theorem I. Theorem I is a simple consequence of admissibility. We have for every integer n and every $r > 0$

$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{2\pi-\delta} f(re^{i\theta})\, e^{-in\theta} d\theta,$$

where $\delta = \delta(r)$ is defined as in (2. 4), (2. 5). We write

$$a_n r^n = I_1 + I_2, \tag{4. 1}$$

where

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f(re^{i\theta})\, e^{-in\theta} d\theta, \qquad I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{2\pi-\delta} f(re^{i\theta})\, e^{-in\theta} d\theta.$$

Evidently we have from (2. 5), uniformly in n,

$$I_2 = \frac{o(f(r))}{(b(r))^{\frac{1}{2}}}, \quad \text{as } r \to R. \tag{4. 2}$$

On the other hand (2. 4) gives, uniformly in n

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{f(r)}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} [1 + o(1)]\, e^{i[a(r)-n]\theta - \frac{1}{2} b(r)\theta^2} d\theta \\ &= \frac{f(r)}{2\pi} \left\{ \int_{-\delta}^{+\delta} e^{i(a(r)-n)\theta - \frac{1}{2} b(r)\theta^2} d\theta + o\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} b(r)\theta^2} d\theta\right] \right\} \\ &= \frac{f(r)}{2\pi} \left\{ \int_{-\delta}^{+\delta} e^{i(a(r)-n)\theta - \frac{1}{2} b(r)\theta^2} d\theta + o[b(r)]^{-\frac{1}{2}} \right\}, \quad \text{as } r \to R. \end{aligned}$$

---

[3]) This asymptotic expansion was recently proved by *A. J. Macintyre* and *R. Wilson*, Math. Ann. **127** (1954), 246, even for complex C.

Now it follows from (2. 4) and (2. 5) that

$$\frac{|f(re^{i\delta})|}{f(r)} \sim e^{-\frac{1}{2}b(r)\,\delta^2} = o[b(r)]^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{as } r \to R.$$

In view of (2. 6) this shows that

$$b(r)\,\delta^2 \to \infty, \quad \text{as } r \to R. \tag{4. 3}$$

Putting $\theta\left(\frac{b(r)}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = y$, $(a(r) - n)\,[2/b(r)]^{\frac{1}{2}} = c$, we obtain

$$I_1 = \frac{f(r)}{\pi\sqrt{2b(r)}}\left[\int\limits_{-\delta(r)\left(\frac{b(r)}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}^{+\delta(r)\left(\frac{b(r)}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} e^{-y^2+icy}\,dy + o(1)\right],$$

which in view of (4. 3) gives

$$I_1 = \frac{f(r)}{\pi\sqrt{2b(r)}}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2+icy}\,dy + o(1)\right].$$

A simple application of Cauchy's theorem gives

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2+icy}\,dy = e^{-\frac{1}{4}c^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(y+\frac{ic}{2}\right)^2}\,dy = e^{-\frac{1}{4}c^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy = \sqrt{\pi}\,e^{-\frac{1}{4}c^2}.$$

Thus we have as $r \to R$, uniformly in n,

$$I_1 = \frac{f(r)}{\sqrt{2\pi b(r)}}\left\{\exp\left[-\frac{(a(r)-n)^2}{2b(r)}\right] + o(1)\right\},$$

and on combining this with (4. 1), (4. 2), we obtain Theorem I.

5. Proof of Corollaries to Theorem I. To prove Theorem I, Corollary I, note that by (2. 6)

$$b(r) = ra'(r) \to +\infty, \quad \text{as } r \to R, \tag{5. 1}$$

so that $a(r)$ increases in some range $\varrho < r < R$. Hence either $a(r)$ is finally positive, or $a(r)$ remains bounded as $r \to R$. To exclude this latter possibility, put $n = -1$ in the main theorem. Then as $r \to R$, we obtain

$$\exp\left[-\frac{(a(r)+1)^2}{b(r)}\right] = o(1),$$

and so

$$\frac{(a(r)+1)^2}{b(r)} \to +\infty, \quad \text{as } r \to R, \tag{5. 2}$$

which contradicts (5. 1), if $a(r)$ remains bounded as $r \to R$. Thus

$$a(r) \to +\infty, \quad \text{as } r \to R, \tag{5. 3}$$

and so $a(r)$ is positive increasing in some range $r_0 \leqq r < R$ and satisfies (5. 3). Now (5. 2), (5. 3) give

$$b(r) = o\,(a(r)+1)^2 = o\,[a(r)]^2, \quad \text{as } r \to R.$$

This completes the proof of Corollary I.

It now follows that if $n > a(r_0)$, there exists a unique value r_n of r, which satisfies $a(r_n) = n$ and $r_0 < r_n < R$. Also r_n increases with n and

$$r_n \to R, \quad \text{as } n \to +\infty.$$

With this definition of r_n, Corollary II now follows from the main theorem.

Further it follows from the main theorem and (5. 1) that for any fixed integer p

$$a_{n+p} r_n^{n+p} \sim \frac{f(r_n)}{\sqrt{2\pi b(r_n)}}, \quad \text{as } n \to +\infty,$$

and putting $p = 0, 1, -1$ in turn, we obtain Corollary IV by division.

Finally note that Theorem I yields

$$\mu(r) = \max_{0 \leq n < \infty} \{| a_n | r^n\} < [1 + o(1)] \frac{f(r)}{\sqrt{2\pi b(r)}}, \quad \text{as } r \to R,$$

and by choosing n as the integer nearest to $a(r)$ as $r \to R$ we obtain also

$$\mu(r) > [1 - o(1)] \frac{f(r)}{\sqrt{2\pi b(r)}}.$$

and so

$$\mu(r) \sim \frac{f(r)}{\sqrt{2\pi b(r)}}. \tag{5. 4}$$

Next let $N(r)$ be the index of the largest term and suppose that

$$[N(r) - a(r)]^2 > \varepsilon^2 b(r),$$

for some r arbitrarily near to R. Then Theorem I gives

$$\mu(r) = a_{N(r)} r^{N(r)} < \frac{f(r)}{\sqrt{2\pi b(r)}} \left[e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}} + o(1)\right],$$

as $r \to R$ through these values, which contradicts (5. 4.) Thus

$$N(r) = a(r) + o[b(r)]^{\frac{1}{2}} \sim a(r),$$

as $r \to R$, by Corollary I. This completes the proof of Corollary III and so of all the corollaries to Theorem I.

6. Growth properties of admissible functions. Theorem I and its Corollaries, particularly Corollary 1, enable us to show that admissible functions grow smoothly. A first result in this direction is

Lemma 1. *Suppose that $f(z)$ is admissible in $|z| < R$. Then*

$$a(re^h) \sim a(r) \tag{6. 1}$$

uniformly as r, re^h tend to R from below and $|h| \leq K/a(r)$ for a fixed positive constant K. Hence if $R < \infty$, we have

$$(R - r)\, a(r) \to +\infty, \quad \text{as } r \to R. \tag{6. 2}$$

Write

$$\varphi(x) = a(e^x).$$

Then $\varphi(x)$ is a positive increasing function of x in some range $x_0 < x < x_1 = \log R$, by Theorem I, Corollary I, and

$$\varphi(x) \to +\infty, \quad \text{as } x \to x_1. \tag{6. 3}$$

Also by the same Corollary

$$\varphi'(x) = e^x a'(e^x) = b(e^x) = o[\varphi(x)]^2, \quad \text{as } x \to x_1.$$

Hence if x', x'' tend to x_1 from below, we have

$$\frac{1}{\varphi(x')} - \frac{1}{\varphi(x'')} = \int_{x'}^{x''} \frac{\varphi'(x)}{[\varphi(x)]^2}\, dx = o(x'' - x').$$

If $|x'' - x'| \leqq K/\varphi(x')$, this gives

$$\frac{1}{\varphi(x'')} = \frac{[1 + o(1)]}{\varphi(x')}, \quad \text{i. e. } \varphi(x'') \sim \varphi(x').$$

Putting $r = e^{x'}$, $h = x'' - x'$, we deduce (6. 1).

Suppose next that R is finite and (6. 2) is false. Then we can find a sequence $R_n \to R$ from below, such that

$$a(R_n) < \frac{C}{R - R_n} < \frac{C'}{\log(R/R_n)}, \tag{6. 4}$$

where C, C' are constants. It then follows from (6. 1), that we have for a sufficiently large fixed n

$$a(r) < 2a(R_n), \quad R_n < r < R,$$

since

$$\log \frac{R}{R_n} < \frac{C'}{a(R_n)},$$

by (6. 4). This contradicts (6. 3) and completes the proof of Lemma 1.

Our next result limits the growth of $a(r)$, $b(r)$ in terms of $f(r)$.

Lemma 2. *Suppose that $f(z)$ is admissible in $|z| < R$. Then if $n > 0$*

$$\frac{f(r)}{r^n} \to +\infty, \quad \text{as } r \to R, \tag{6. 5}$$

and given $\varepsilon > 0$, we have

$$a(r) = O[f(r)]^\varepsilon, \quad b(r) = O[f(r)]^\varepsilon, \tag{6. 6}$$

as $r \to R$ from below.

It follows from Theorem I, that $a_n > 0$ for all large n. Suppose e. g. $a_k > 0$. Then when r is sufficiently near to R, Theorem I gives

$$f(r) > \tfrac{1}{2} a_k r^k \sqrt{2\pi b(r)},$$

and (6. 5) now follows from this and (2. 6).

Next suppose that we have

$$a(r) = r\frac{f'(r)}{f(r)} \geqq [f(r)]^\varepsilon, \tag{6. 7}$$

for all r in some range $R_1 \leqq r < R$, where $R_1 < R$. Then

$$\int_{R_1}^{\varrho} \frac{f'(r)}{[f(r)]^{1+\varepsilon}}\, dr \geqq \int_{R_1}^{\varrho} \frac{dr}{r} = \log \frac{\varrho}{R_1}, \quad R_1 < \varrho < R.$$

$$\frac{[f(R_1)]^{-\varepsilon} - [f(\varrho)]^{-\varepsilon}}{\varepsilon} \geqq \log \frac{\varrho}{R_1}.$$

Making $\varrho \to R$, we obtain a contradiction at once if R is infinite, since the left hand side remains finite. If R is finite, we obtain

$$[f(R_1)]^{-\varepsilon} \geqq \varepsilon \log \frac{R}{R_1},$$

$$f(R_1) \leqq \left\{\varepsilon \log \frac{R}{R_1}\right\}^{-1/\varepsilon} < \frac{C}{(R-R_1)^{1/\varepsilon}}, \tag{6. 8}$$

where C is a constant. Here R_1 may be as near R as we please. Now by (6. 2) we have with some $R_2 < R$,

$$a(r) > \frac{2r}{\varepsilon(R-r)}, \quad R_2 < r < R,$$

and so

$$\frac{f'(r)}{f(r)} > \frac{2}{\varepsilon(R-r)}, \quad R_2 < r < R.$$

Now integration yields

$$\log f(R_1) > \log f(R_2) + \frac{2}{\varepsilon} \log \frac{R-R_2}{R-R_1}, \quad R_2 < R_1 < R.$$

When R_1 is sufficiently near to R this contradicts (6. 8).

Thus (6. 7) is false for some r arbitrarily near R. Suppose now that R_1 is so near to R, that

$$b(r) < \varepsilon\,[a(r)]^2, \quad R_1 \leqq r < R, \tag{6. 9}$$

while at the same time

$$a(R_1) < [f(R_1)]^{\varepsilon}.$$

Such an R_1 exists by Theorem I, Corollary I. Then we have

$$a(r) < [f(r)]^{\varepsilon}, \quad R_1 < r < R. \tag{6. 10}$$

For suppose that (6. 10) is false and let R_2 be the smallest number such that $R_1 < R_2 < R$ and

$$a(R_2) = [f(R_2)]^{\varepsilon}.$$

Then

$$r\frac{d}{dr}\{a(r) - [f(r)]^{\varepsilon}\} = b(r) - \varepsilon r f'(r)[f(r)]^{\varepsilon-1} = b(r) - \varepsilon a(r)[f(r)]^{\varepsilon} \geqq 0,$$

when $r = R_2$ and this contradicts (6. 9). Thus (6. 10) holds and in view of this and (6. 9), Lemma 2 is proved.

Our next lemma concerns the growth of $f(r)$.

Lemma 3. *If $f(z)$ is admissible in $|z| < R$, we have for any fixed real k*

$$f\left(r + \frac{kr}{a(r)}\right) \sim e^k f(r), \quad \textit{as } r \to R.$$

In fact the mean value theorem gives for $0 < r < R$, $0 < r + h < R$,

$$\log f(r+h) - \log f(r) = h\frac{f'(r+\theta h)}{f(r+\theta h)} = \frac{h}{r+\theta h}\,a(r+\theta h), \tag{6. 11}$$

where $0 < \theta < 1$. Also if $h = kr/a(r)$,

$$\frac{r+\theta h}{r} = r\left[1 + \frac{O(1)}{a(r)}\right],$$

and so by Lemma 1, we have as $r \to R$

$$a(r+\theta h) \sim a(r), \quad r + \theta h \sim r.$$

Now Lemma 3 follows from (6. 11).

7. Behaviour of the partial sums. Our next result shows that distribution of the terms in the series for $f(r)$ is asymptotically Gaussian as $r \to R$.

THEOREM II. *Suppose $f(z) = \sum_0^\infty a_n r^n$ is admissible in $|z| < R$. Then for any fixed real ω, we have as $r \to R$*

$$\sum_{n \leq a(r) + \omega [2b(r)]^{\frac{1}{2}}} a_n r^n \sim \sum_{n \leq a(r) + \omega [2b(r)]^{\frac{1}{2}}} |a_n| r^n \sim \frac{f(r)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\omega} e^{-t^2} dt.$$

Let N_0 be the integer, such that $N_0 \leq a(r) < N_0 + 1$. Suppose that ω_1, ω_2 are fixed, $\omega_1 < 0 < \omega_2$, and let N_1, N_2 be the largest integers such that $N_1 \leq a(r) + \omega_1 [2b(r)]^{\frac{1}{2}}$, $N_2 \leq a(r) + \omega_2 [2b(r)]^{\frac{1}{2}}$ respectively. We have for $N_0 + 2 \leq n \leq N_2$

$$\int_n^{n+1} \exp\left\{-\frac{[x - a(r)]^2}{2b(r)}\right\} dx \leq \exp\left\{-\frac{(n - a(r))^2}{2b(r)}\right\} \leq \int_{n-1}^{n} \exp\left\{-\frac{[x - a(r)]^2}{2b(r)}\right\} dx,$$

and addition yields

$$\int_{N_0+2}^{N_2+1} \exp\left\{-\frac{[x - a(r)]^2}{2b(r)}\right\} dx \leq \sum_{N_0+2}^{N_2} \exp\left\{-\frac{[n - a(r)]^2}{2b(r)}\right\} \leq \int_{N_0+1}^{N_2} \exp\left\{-\frac{[x - a(r)]^2}{2b(r)}\right\} dx.$$

In the integrals put $x = a(r) + t[2b(r)]^{\frac{1}{2}}$. Then they become

$$[2b(r)]^{\frac{1}{2}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2} dt, \quad [2b(r)]^{\frac{1}{2}} \int_{t_3}^{t_4} e^{-t^2} dt,$$

where

$$t_1 \to 0, \quad t_3 \to 0, \quad t_2 \to \omega_2, \quad t_4 \to \omega_2, \quad \text{as } r \to R.$$

Thus we have

$$\sum_{n=N_0+2}^{N_2} \exp\left\{-\frac{(n - a(r))^2}{2b(r)}\right\} \sim [2b(r)]^{\frac{1}{2}} \int_0^{\omega_2} e^{-t^2} dt, \quad \text{as } r \to R.$$

A similar argument shows that

$$\sum_{n=N_1+1}^{N_0-1} \exp\left\{-\frac{(n - a(r))^2}{2b(r)}\right\} \sim [2b(r)]^{\frac{1}{2}} \int_{\omega_1}^{0} e^{-t^2} dt, \quad \text{as } r \to R.$$

Also $N_2 - N_1 = O[b(r)]^{\frac{1}{2}}$. Thus Theorem I gives as $r \to R$

$$\begin{aligned} \sum_{N_1+1}^{N_0} a_n r^n &= \frac{f(r)}{\sqrt{2\pi b(r)}} \sum_{N_1+1}^{N_0} \left[\exp\left\{-\frac{[n - a(r)]^2}{2b(r)}\right\} + o(1)\right] \\ &= \frac{f(r)}{\sqrt{\pi}} \left\{\int_{\omega_1}^{0} e^{-t^2} dt + o(1)\right\}; \end{aligned} \tag{7.1}$$

and similarly

$$\sum_{N_0+1}^{N_2} a_n r^n = \frac{f(r)}{\sqrt{\pi}} \left\{\int_0^{\omega_2} e^{-t^2} dt + o(1)\right\}. \tag{7.2}$$

Now choose $\omega_2 = -\omega_1$ so large that

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-t^2} dt > \sqrt{\pi}(1 - \varepsilon).$$

Then for sufficiently large r we shall have

$$\sum_{N_1+1}^{N_2} a_n r^n > (1-\varepsilon) f(r)$$

and so

$$\sum_0^{N_1} a_n r^n + \sum_{N_2+1}^{\infty} a_n r^n < \varepsilon f(r).$$

Also by Theorem I $a_n > 0$ for all large n and from this and (6. 5) it follows that we have as $r \to R$, uniformly for any positive p

$$0 \leqq \sum_0^R |a_n| r^n - \sum_0^R a_n r^n = o[f(r)].$$

Thus we have for r sufficiently near R

$$\left|\sum_0^{N_1} a_n r^n\right| < \sum_0^{N_1} |a_n| r^n < 2\varepsilon f(r),$$

and hence by (7. 1)

$$\left|\sum_0^{N_2} a_n r^n - \frac{f(r)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-t^2} dt\right| < \sum_0^{N_1} a_n r^n + \frac{f(r)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\omega_1} e^{-t^2} dt + \left|\sum_{N_1+1}^{N_2} a_n r^n - \frac{f(r)}{\sqrt{\pi}} \int_{\omega_1}^0 e^{-t^2} dt\right|$$
$$< 4\varepsilon f(r).$$

Since ε may be chosen as small as we please, we deduce

$$\sum_0^{N_2} a_n r^n \sim \sum_0^{N_2} |a_n| r^n \sim \frac{f(r)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-t^2} dt. \tag{7. 3}$$

This proves Theorem II if $\omega = 0$. If $\omega \neq 0$, we write $\omega = \omega_1$ or ω_2 and now Theorem II follows from (7. 1), (7. 2) and (7. 3), since for r sufficiently near R, $a_n > 0$ for $n > N_1$.

8. Growth of the derivatives. We have next

THEOREM III. *Suppose $f(z)$ is admissible in $|z| < R$. Then for any fixed positive integer k, we have*

$$f^{(k)}(r) \sim f(r) \left(\frac{a(r)}{r}\right)^k, \text{ as } r \to R.$$

Take $R_1 = r[1 + 1/a(r)]$. Then we have in $|z| < R_1$

$$f(z) = \left|\sum_0^\infty a_n z^n\right| \leqq \sum_0^\infty |a_n| R_1^n = O\{f(R_1)\} = O\{f(r)\},$$

by Lemma 3 and Theorem II. Thus the Cauchy inequalities give, with $h = R_1 - r$,

$$|f^{(k)}(r)| \leqq \frac{k!}{h^k} \max_{|z-r| \leqq h} |f(z)| = O\left\{f(r)\left(\frac{a(r)}{r}\right)^k\right\}. \tag{8. 1}$$

We wish to sharpen (8. 1) to asymptotic equality. We write

$$r^k f^{(k)}(r) = \sum_0^\infty n(n-1)\cdots(n-k+1)\, a_n r^n = \Sigma_1 + \Sigma_2,$$

where ω is a positive constant and

$$\Sigma_1 = \sum_{|a(r)-n| \leq \omega[2b(r)]^{\frac{1}{2}}} n(n-1)\cdots(n-k+1)\, a_n r^n,$$

$$\Sigma_2 = \sum_{|a(r)-n| > \omega[2b(r)]^{\frac{1}{2}}} n(n-1)\cdots(n-k+1)\, a_n r^n.$$

Clearly we have in Σ_1 by Theorem I, Corollary I

$$n(n-1)\cdots(n-k+1) \sim n^k \sim [a(r)]^k.$$

Using also Theorem II, we deduce

$$\Sigma_1 \sim [a(r)]^k \sum_{|a(r)-n| \leq \omega[2b(r)]^{\frac{1}{2}}} a_n r^n \sim \frac{f(r)[a(r)]^k}{\sqrt{\pi}} \int_{-\omega}^{+\omega} e^{-t^2} dt. \tag{8. 2}$$

Now let Σ' denote summation over the range $|n - a(r)| > \omega[2b(r)]^{\frac{1}{2}}$. Then

$$\begin{aligned} |\Sigma_2| &\leq \Sigma' n^k |a_n| r^n \leq (\Sigma' n^{2k} |a_n| r^n)^{\frac{1}{2}} (\Sigma' |a_n| r^n)^{\frac{1}{2}} \\ &= O\left\{ f^{(2k)}(r) f(r) \left[\int_{-\infty}^{-\omega} e^{-t^2} dt + \int_{\omega}^{\infty} e^{-t^2} dt \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= O\left[f(r)\,(a(r))^k \right] \left[\int_{\omega}^{\infty} e^{-t^2} dt \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{8. 3}$$

by (8. 1) applied with $2k$ instead of k and Theorem II, where the constant implied in the O-result is independent of ω. Thus if ω is sufficiently large depending on ε, and then r is chosen sufficiently near to R, (8. 2) and (8. 3) give

$$|\Sigma_1 + \Sigma_2 - f(r)\,[a(r)]^k| < \varepsilon f(r)\,[a(r)]^k,$$

and this proves Theorem III.

The quantities

$$f_k(r) = \inf_{h>0} \frac{f(r+h)}{h^k}$$

have recently been considered[4]), and shown to have a growth comparable to $f^{(k)}(r)$ in many cases. For admissible functions we have again an asymptotic equality.

THEOREM IV. *Suppose that $f(z)$ is admissible in $|z| < R$. Then for any fixed positive k we have*

$$f_k(r) \sim f(r) \left[\frac{ea(r)}{kr} \right]^k, \quad \textit{as } r \to R.$$

We have for $0 < r < re^h < R$ and r sufficiently near to R

$$\log f(re^h) - \log f(r) = hre^{\theta h} \frac{f'(re^{\theta h})}{f(re^{\theta h})} = ha(re^{\theta h}) > ha(r),$$

where $0 < \theta < 1$, since $a(r)$ is finally positive and increasing. Hence

$$\frac{f(re^h)}{(re^h - r)^h} > \frac{f(r)}{r^k} \frac{e^{ha(r)}}{(e^h - 1)^k}. \tag{8. 4}$$

Now if $a = a(r) > k$ we have

$$\inf_{h>0} \frac{e^{ah}}{(e^h - 1)^k} = \frac{a^a}{k^k (a-k)^{a-k}}.$$

---

[4]) See e. g. *W. K. Hayman* and *F. M. Stewart*, Proc. Cam. Phil. Soc. **50** (1954), 250—260.

Also as $a \to +\infty$ for fixed k

$$\frac{a^a}{(a-k)^{a-k}k^k} = \left(\frac{a}{k}\right)^k \left(1-\frac{k}{a}\right)^{-a+k} \sim \left(\frac{ea}{k}\right)^k.$$

Thus (8. 4) gives, provided $r_0(\varepsilon) < r < R$,

$$f_k(r) = \inf_{h>0} \frac{f(re^h)}{(re^h - r)^k} > (1-\varepsilon)\frac{f(r)}{r^k}\left(\frac{ea(r)}{k}\right)^k. \tag{8. 5}$$

Conversely Lemma 3 gives with $h = kr/a(r)$ as $r \to R$,

$$f_k(r) \leqq \frac{f(r+h)}{h^k} \sim \frac{e^k f(r)}{h^k} = f(r)\left(\frac{ea(r)}{kr}\right)^k.$$

On combining this with (8. 5) we have Theorem IV.

9. Approximation to $f(z)$ near $z = r$. Our next result gives sufficient conditions for (2. 4).

Lemma 4. *Suppose that $f(z)$ is regular and not zero in $|z-r| < 2\eta r$, where $0 < \eta \leqq \frac{1}{2}$, and that*

$$|b(z)| < Cb(r) \tag{9. 1}$$

there, where $a(z), b(z)$ are defined as in (2. 2), (2. 3) and C is a positive constant. Then we have

$$\log f(re^{i\theta}) = \log f(r) + i\theta a(r) - \frac{\theta^2}{2} b(r) + \varepsilon(r, \theta),$$

where

$$|\varepsilon(r, \theta)| < \frac{Cb(r)\,|\theta|^3}{2\eta}, \quad \textit{for } |\theta| \leqq \eta. \tag{9. 2}$$

Write

$$\varphi(\zeta) = \log f(e^\zeta)$$

and put $\xi_0 = \log r$. Then if $|\zeta - \xi_0| \leqq \eta$, we shall have

$$|e^\zeta - r| = r\,|e^{(\zeta-\xi_0)} - 1| \leqq r(e^{|\zeta-\xi_0|} - 1) \leqq r(e^\eta - 1) < 2\eta r,$$

since $\eta \leqq \frac{1}{2}$. Hence

$$\varphi''(\zeta) = b(e^\zeta)$$

is regular in $|\zeta - \xi_0| \leqq \eta$ and satisfies there

$$|\varphi''(\zeta)| < C\varphi''(\xi_0).$$

Thus we have a power series development

$$\varphi''(\zeta) = \sum_0^\infty c_n(\zeta - \xi_0)^n, \quad |\zeta - \xi_0| \leqq \eta,$$

where, by the Cauchy inequalities

$$|c_n| \leqq \frac{C\varphi''(\xi_0)}{\eta^n} = \frac{Cb(r)}{\eta^n}.$$

This gives, on integrating twice with respect to ζ

$$\varphi(\zeta) = \varphi(\xi_0) + (\zeta - \xi_0)\varphi'(\xi_0) + \frac{1}{2}(\zeta - \xi_0)^2\varphi''(\xi_0) + \sum_{n=1}^\infty \frac{c_n}{(n+1)(n+2)}(\zeta - \xi_0)^{n+2}. \tag{9. 3}$$

Now we have for $|\zeta - \xi_0| \leqq \eta$, $n \geqq 1$,

$$|c_n|\,|\zeta - \xi_0|^{n+2} \leqq \frac{Cb(r)}{\eta^n}|\zeta - \xi_0|^{n+2} \leqq \frac{Cb(r)\,|\zeta - \xi_0|^3}{\eta}.$$

We put $\zeta - \xi_0 = i\theta$ with $|\theta| \leqq \eta$ and note that

$$\varphi'(\xi_0) = a(r), \quad \varphi''(\xi_0) = b(r).$$

Then (9. 3) gives

$$\log f(re^{i\theta}) = \log f(r) + i\theta a(r) - \tfrac{1}{2}\theta^2 b(r) + \varepsilon(r, \theta),$$

where

$$|\varepsilon(r, \theta)| \leqq \frac{Cb(r)|\theta|^3}{\eta} \sum_1^\infty \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{Cb(r)|\theta|^3}{2\eta},$$

as required. This proves Lemma 4.

Lemma 4 enables us to approximate to $f(re^{i\theta})$ for small θ with greater accuracy, than is implied by (2. 4). We have

Lemma 5. *Suppose $f(z)$ is admissible in $|z| < R$. Then we have as $r \to R$, uniformly for $|\theta| \leqq [a(r)]^{-1}$*

$$f(re^{i\theta}) = f(r) + i\theta r f'(r) - \tfrac{1}{2}\theta^2 [rf'(r) + r^2 f''(r)] + O[\theta^3 f(r)\, a(r)^3].$$

We apply Lemma 4 to

$$F(z) = e^{f(z)}$$

and write

$$A(z) = z\frac{F'(z)}{F(z)} = zf'(z), \quad B(z) = zA'(z) = zf'(z) + z^2 f''(z).$$

Then we have, by Theorem III

$$B(r) \sim f(r)[a(r)]^2, \quad \text{as } r \to R. \tag{9. 4}$$

Again if $\eta = [a(r)]^{-1}$, we have for $|\zeta - r| \leqq 2\eta r$

$$|B(\zeta)| \leqq B(r + 2\eta r) + O(r^N),$$

since $B(z)$ has only a finite number of negative coefficients in its power series expansion. Also (9. 4) and Lemmas 1 and 3 give

$$B(r + 2\eta r) \sim f(r + 2\eta r)[a(r + 2\eta r)]^2 \sim e^2 f(r)[a(r)]^2.$$

We may therefore for r sufficiently near R apply Lemma 4 to $F(z)$ instead of $f(z)$, $A(r)$, $B(r)$ instead of $a(r)$, $b(r)$ and $C = 9$. We obtain

$$f(re^{i\theta}) = f(r) + i\theta A(r) - \tfrac{1}{2}\theta^2 B(r) + \varepsilon(r, \theta),$$

where for r sufficiently near R we have

$$\varepsilon(r, \theta) < 5f(r)[a(r)]^3 |\theta|^3, \quad \text{if } |\theta| \leqq 1/a(r).$$

This proves Lemma 5.

10. The maximum modulus of admissible functions. We can now prove (2. 1) and a little more.

THEOREM V. *Suppose that $f(z)$ is admissible in $|z| < R$. Then we can find $R_0 < R$, such that for $R_0 < r < R$ and $0 < |\theta| \leqq \pi$ we have*

$$|f(re^{i\theta})| < f(r).$$

We need another lemma.

Lemma 6. *With the hypotheses of Theorem V we can find $R_1 < R$ such that for $R_1 < r < R$ and $[f(r)]^{-\frac{2}{5}} \leqq |\theta| \leqq \pi$ we have*

$$|f(re^{i\theta})| \leqq f(r) - [f(r)]^{\frac{1}{7}}.$$

To prove Lemma 6, write

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$$

and choose k so that $k \leqq a(r) \leqq k+1$. Further write

$$\alpha = a_k r^k, \quad \beta = a_{k+1} r^{k+1}.$$

Then we have by Theorem I, as $r \to R$,

$$\alpha \sim \beta \sim \frac{f(r)}{\sqrt{2\pi b(r)}}. \tag{10.1}$$

Further if $z = re^{i\theta}$, $0 < |\theta| \leqq \pi$,

$$|a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1}|^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\cos\theta$$
$$= (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta\sin^2\frac{\theta}{2} \leqq (\alpha+\beta)^2 - \frac{4\alpha\beta\theta^2}{\pi^2}.$$

Thus

$$(\alpha+\beta) - |a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1}| \geqq \frac{4\alpha\beta\theta^2}{\pi^2[(\alpha+\beta) + |a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1}|]} \geqq \frac{2\alpha\beta\theta^2}{\pi^2(\alpha+\beta)}.$$

On using (10.1) we deduce that if r is sufficiently near to R, and $[f(r)]^{-\frac{2}{5}} \leqq |\theta| \leqq \pi$, we have

$$|a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1}| \leqq \alpha + \beta - \frac{1}{10}\frac{[f(r)]^{\frac{1}{5}}}{\sqrt{2\pi b(r)}}.$$

By Lemma 2 this gives for r sufficiently near to R

$$|a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1}| \leqq \alpha + \beta - [f(r)]^{\frac{1}{6}}.$$

Thus we have for this range of θ as $r \to R$,

$$|f(re^{i\theta})| \leqq \sum_0^{k-1} |a_n| r^n + |a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1}| + \sum_{n=k+1}^\infty |a_n| r^n$$
$$\leqq \sum_0^\infty |a_n| r^n - [f(r)]^{\frac{1}{6}}$$
$$\leqq f(r) + O(r^N) - [f(r)]^{\frac{1}{6}},$$

if $a_n > 0$ for $n > N$. Using (6.5) we deduce

$$|f(re^{i\theta})| \leqq f(r) - [f(r)]^{\frac{1}{7}}$$

for $[f(r)]^{-\frac{2}{5}} \leqq |\theta| \leqq \pi$, and r sufficiently near R. This proves Lemma 6.

To complete the proof of Theorem V, we may confine ourselves to the range $0 < |\theta| < [f(r)]^{-\frac{2}{5}}$. In this range we have

$$|\theta| = o[a(r)]^{-1},$$

by Lemma 2, so that Lemma 5 is applicable. If we write $f(re^{i\theta}) = u + iv$, then Lemma 5 yields

$$u = f(r) - \tfrac{1}{2}\theta^2\{rf'(r) + r^2 f''(r) + O[f(r)]^{\frac{3}{5}}[a(r)]^3\},$$
$$v = \theta\{rf'(r) + O[f(r)]^{\frac{1}{5}}[a(r)]^3\}.$$

Hence by Theorem III and Lemma 2 we deduce

$$\begin{aligned} |f(re^{i\theta})|^2 &= u^2 + v^2 \\ &= [f(r)]^2 - \theta^2[f(r)(rf'(r) + r^2 f''(r)) - r^2(f'(r))^2 + O(f(r))^{\frac{8}{5}} a(r)^3] \\ &\quad + O(\theta^4)[f(r)]^2 a(r)^4 \\ &= [f(r)]^2 - \theta^2[(f(r))^2 b(r) + O[f(r)]^{\frac{9}{5}}] \end{aligned}$$

Since $b(r) \to +\infty$ as $r \to R$, by (2. 6), this gives

$$|f(re^{i\theta})|^2 < [f(r)]^2$$

throughout the range $0 < |\theta| < [f(r)]^{-\frac{2}{5}}$ for r sufficiently near R, and this together with Lemma 6 proves Théorem V.

This result shows that for admissible functions we may replace $f(r)$ by

$$M(r, f) = \sup_{|\theta| \leq \pi} |f(re^{i\theta})|$$

for all sufficiently large r in the definitions (2. 2) and (2. 3) so that Theorem I does yield (1. 5).

11. Exponentials and products of admissible functions. Our aim in the next two sections is to show how, given some examples of admissible functions, other may be constructed. Some basic examples will be given in the last part of the paper.

THEOREM VI. *If $f(z)$ is admissible in $|z| < R$, so is $e^{f(z)}$.*

We shall deduce this result from Lemmas 5 and 6 by showing that

$$F(z) = e^{f(z)}$$

satisfies (2. 4), (2. 5) and (2. 6) with $\delta(r) = [f(r)]^{-\frac{2}{5}}$ and

$$A(z) = z\frac{F'(z)}{F(z)} = zf'(z), \quad B(z) = zA'(z) = zf'(z) + z^2 f''(z),$$

replacing $a(z)$, $b(z)$ respectively.

It follows from Theorem III and Theorem I, Corollary I, that

$$B(r) \sim f(r)\, a(r)^2 \to +\infty, \quad \text{as } r \to R. \tag{11. 1}$$

This proves (2. 6). Further if $|\theta| \leq \delta(r) = [f(r)]^{-\frac{2}{5}}$, Lemma 5 yields

$$\log F(re^{i\theta}) = \log F(r) + i\theta A(r) - \tfrac{1}{2}\theta^2 B(r) + O[f(r)]^{-\frac{1}{5}} a(r)^3,$$

and in view of Lemma 2, we deduce (2. 4).

Finally if $\delta(r) \leq |\theta| \leq \pi$, Lemma 6 gives for r sufficiently near R

$$|F(re^{i\theta})| \leq F(r) \exp\{-[f(r)]^{\frac{1}{7}}\} \leq F(r) \exp\{-[B(r)]^{\frac{1}{8}}\},$$

by (11. 1) and Lemma 2. This proves (2. 5) for $F(z)$. Thus $F(z)$ is admissible in $|z| < R$ and the proof of Theorem VI is complete.

Our next two results relate to products.

THEOREM VII. *If $f_1(z)$, $f_2(z)$ are admissible in $|z| < R$, then so is $f_1(z) f_2(z)$.*

We set $f(z) = f_1(z) f_2(z)$ and let $a(r)$, $b(r)$; $a_1(r)$, $b_1(r)$; $a_2(r)$, $b_2(r)$ be defined in terms of $f(z)$, $f_1(z)$, $f_2(z)$ respectively by (2. 2), (2. 3). Then

$$a(r) = a_1(r) + a_2(r), \quad b(r) = b_1(r) + b_2(r).$$

Thus since $b_1(r)$, $b_2(r)$ satisfy (2. 6), so does $b(r)$. Also if $f_1(r)$, $f_2(r)$ are positive in $r_0 \leqq r < R$, so is $f(r)$. Suppose next, that $f_1(z)$, $f_2(z)$ satisfy (2. 4) and (2. 5) with functions $\delta_1(r)$, $\delta_2(r)$. We shall show that $f(z)$ satisfies (2. 4), (2. 5) with

$$\delta(r) = \min\,[\delta_1(r), \delta_2(r)].$$

This is trivial for (2. 4), on multiplying the asymptotic relations for $f_1(z)$ and $f_2(z)$.

To prove (2. 5), suppose that in $R_0 < r < R$ we have $b_1(r) > e$, $b_2(r) > e$ and that with $\varepsilon < \frac{1}{2}$ we have

$$\frac{|f_1(re^{i\theta})|}{f_1(r)} \leqq \frac{\varepsilon}{[b_1(r)]^{\frac{1}{2}}}, \quad \delta_1(r) \leqq |\theta| \leqq \pi, \tag{11. 2}$$

$$\frac{|f_2(re^{i\theta})|}{f_2(r)} \leqq \frac{\varepsilon}{[b_2(r)]^{\frac{1}{2}}}, \quad \delta_2(r) \leqq |\theta| \leqq \pi. \tag{11. 3}$$

Consider for definiteness those values of r for which $b_1(r) \geqq b_2(r)$. We wish to extend (11. 2) to the range $\delta(r) \leqq |\theta| \leqq \pi$. There is nothing to prove unless $\delta_2(r) < \delta_1(r)$. In this case we have from (2. 4) applied to $f_1(z)$, that for $\delta_2(r) \leqq |\theta| \leqq \delta_1(r)$

$$\frac{|f_1(re^{i\theta})|}{f_1(r)} \sim e^{-\frac{1}{2}b_1(r)\theta^2} \leqq e^{-\frac{1}{2}b_1(r)[\delta_2(r)]^2}. \tag{11. 4}$$

Also by (2. 4) applied to $f_2(z)$ with $\theta = \delta_2(r)$, we have as $r \to R$

$$\frac{|f_2(re^{i\delta_2(r)})|}{f_2(r)} \sim e^{-\frac{1}{2}b_2(r)[\delta_2(r)]^2},$$

and if r is sufficiently near to R, we deduce from this and (11. 3)

$$e^{-\frac{1}{2}b_2(r)[\delta_2(r)]^2} < \frac{2\varepsilon}{[b_2(r)]^{\frac{1}{2}}}. \tag{11. 5}$$

Now we note that $t^{\frac{1}{2}}e^{-at}$ decreases with increasing t for $a > 0$, $at > \frac{1}{2}$, and hence if $y > x > e$, and for some positive a and $\varepsilon < \frac{1}{2}$

$$e^{-ax} < 2\varepsilon x^{-\frac{1}{2}}$$

Then we have also

$$e^{-ay} < 2\varepsilon y^{-\frac{1}{2}}.$$

Thus (11. 5) implies

$$e^{-\frac{1}{2}b_1(r)[\delta_2(r)]^2} < \frac{2\varepsilon}{[b_1(r)]^{\frac{1}{2}}}.$$

Hence (11. 4) yields for r sufficiently near R

$$\frac{|f_1(re^{i\theta})|}{f_1(r)} < \frac{3\varepsilon}{[b_1(r)]^{\frac{1}{2}}},$$

and in view of (11. 2) this relation holds for $\delta(r) \leqq |\theta| \leqq \pi$. Since also

$$b(r) = b_1(r) + b_2(r) \leqq 2b_1(r),$$

this yields

$$\frac{|f_1(re^{i\theta})|}{f_1(r)} < \frac{3\varepsilon\sqrt{2}}{[b(r)]^{\frac{1}{2}}}, \quad \delta(r) \leqq |\theta| \leqq \pi,$$

while by Theorem V we have finally

$$\frac{|f_2(re^{i\theta})|}{f_2(r)} < 1, \quad 0 < |\theta| \leqq \pi.$$

On multiplying these last two relations we have

$$\frac{|f(re^{i\theta})|}{f(r)} < \frac{5\varepsilon}{[b(r)]^{\frac{1}{2}}}, \quad \delta(r) \leqq |\theta| \leqq \pi,$$

provided r is near enough to R, and this proves (2. 5) for $f(z)$ and completes the proof of Theorem VII.

12. Addition and multiplication by polynomials. We next consider the products of admissible functions by polynomials. Our result is

THEOREM VIII. *Suppose that $f(z)$ is admissible in $|z| < R$ and that*

$$P(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m$$

is a polynomial with real coefficients, such that $P(R) > 0$, if $R < +\infty$, $b_m > 0$ if $R = +\infty$. Then $f(z)\,P(z)$ is admissible in $|z| < R$.

Suppose that $a(r)$, $b(r)$ are defined in terms of $f(z)$ as in (2. 2), (2. 3) and that (2. 4), (2. 5) hold with a suitable function $\delta(r)$. We may suppose that

$$\delta(r) \leqq \left[2\,\frac{\log b(r)}{b(r)}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{12. 1}$$

since otherwise we should have from (2. 4) for $[2 \log b(r)/b(r)]^{\frac{1}{2}} \leqq |\theta| \leqq \delta(r)$,

$$\frac{|f(re^{i\theta})|}{f(r)} \sim \exp\left[-\frac{1}{2}\,b(r)\,\theta^2\right] \leqq \exp\left[-\log b(r)\right] = \frac{1}{b(r)},$$

which yields (2. 5). Thus we may replace $\delta(r)$ by $\min\{\delta(r), [2 \log b(r)/b(r)]^{\frac{1}{2}}\}$, without destroying the truth of (2. 5). If $R = +\infty$, we then have

$$\frac{P(re^{i\theta})}{P(r)} \sim 1, \quad \text{as } r \to R, \tag{12. 2}$$

uniformly for $|\theta| \leqq \delta(r)$, and if R is finite (12. 1) shows that (12. 2) also holds, since in this case $P(R) > 0$ and

$$P(re^{i\theta}) \sim P(r) \sim P(R).$$

It also follows that $P(r)$ and hence $f(r)\,P(r)$ are positive for r sufficiently near R. Next (12. 2) and (2. 4) yield

$$\frac{f(re^{i\theta})}{f(r)}\,\frac{P(re^{i\theta})}{P(r)} \sim e^{i\theta a(r) - \frac{1}{2}\theta^2 b(r)}, \quad \text{as } r \to R \tag{12. 3}$$

uniformly for $|\theta| \leqq \delta(r)$.

Next, if R is finite, $|P(z)|$ is bounded in $|z| < R$, while $P(r)$ is bounded below as $r \to R$. Thus

$$\frac{|P(re^{i\theta})|}{P(r)} = O(1), \quad \text{as } r \to R, \quad \delta(r) \leqq |\theta| \leqq \pi. \tag{12. 4}$$

If $R = +\infty$, we have

$$\frac{|P(re^{i\theta})|}{P(r)} \to 1, \quad \text{as } r \to +\infty,$$

uniformly in θ, so that (12. 4) holds in either case. Thus on applying (2. 5) to $f(z)$ and using (12. 4) we deduce

$$\frac{|f(re^{i\theta})\,P(re^{i\theta})|}{f(r)\,P(r)} = o[b(r)]^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{as } r \to R, \tag{12. 5}$$

uniformly for $\delta(r) \leqq |\theta| \leqq \pi$.

To complete the proof of admissibility we have merely to show that we may replace $a(r)$, $b(r)$ by

$$a(r) + r\frac{P'(r)}{P(r)}, \qquad b(r) + r\frac{d}{dr}\, r\frac{P'(r)}{P(r)},$$

in the asymptotic relations (12. 3), (12. 5). This follows since $rP'(r)/P(r)$ and its derivative remain bounded, while $\delta(r) \to 0$, and $a(r)$, $b(r)$ tend to infinity as $r \to R$. Thus the proof of Theorem VIII is complete.

We may also add smaller functions and in particular polynomials to admissible functions, without destroying admissibility.

THEOREM IX. *Suppose that $f(z)$ is admissible in $|z| < R$ and that $g(z)$ is regular in $|z| < R$, real for real z, and that for some positive δ we have*

$$M(r, g) = \max_{|z|=r} |g(z)| = O[f(r)]^{1-\delta}, \quad \textit{as } r \to R. \tag{12. 6}$$

Then $f(z) + g(z)$ is admissible in $|z| < R$.

Corollary. *If $P(w) = b_0 + b_1 w + \cdots + b_m w^m$ is a polynomial with real coefficients and $f(z)$ is admissible in $|z| < R$, then so is $f(z) + P(z)$ and, if $b_m > 0$, so is $P[f(z)]$.*

We suppose that $f(z)$ is admissible. It is clear from (12. 6), that $f(r) + g(r) > 0$ if r is sufficiently near to R. Again, we have by (2. 4), (2. 5) as $r \to R$

$$f(re^{i\theta}) \sim f(r)\, e^{ia(r)\theta - \frac{1}{2}b(r)\theta^2}, \tag{12. 7}$$

uniformly for $|\theta| \leqq \delta(r)$, while

$$|f(re^{i\theta})| = \frac{o(f(r))}{[b(r)]^{\frac{1}{2}}}, \quad \delta(r) \leqq |\theta| \leqq \pi. \tag{12. 8}$$

We may again suppose that $\delta(r)$ satisfies (12. 1). Then for r sufficiently near R we deduce from (12. 7) and Lemma 2

$$|f(re^{i\theta})| \sim f(r)\, e^{-\frac{1}{2}b(r)\theta^2} \geqq \frac{f(r)}{b(r)} > [f(r)]^{1-\frac{\delta}{2}}$$

as $r \to R$ for $|\theta| \leqq \delta(r)$. Hence we have from (12. 6), for $|\theta| \leqq \delta(r)$,

$$f(re^{i\theta}) + g(re^{i\theta}) \sim [f(r) + g(r)]\, e^{i\theta a(r) - \frac{1}{2}\theta^2 b(r)}. \tag{12. 9}$$

Similarly by (12. 8)

$$f(re^{i\theta}) + g(re^{i\theta}) = o[f(r) + g(r)]\,[b(r)]^{-\frac{1}{2}}, \tag{12. 10}$$

as $r \to R$, while $\delta(r) \leqq |\theta| \leqq \pi$. To complete the proof of admissibility for $F(z) = f(z) + g(z)$, it remains to show, that if

$$A(r) = r\frac{F'(r)}{F(r)}, \qquad B(r) = rA'(r),$$

then

$$A(r) = a(r) + o(1), \quad B(r) = b(r) + o(1),$$

since we may then replace $a(r)$ by $A(r)$, $b(r)$ by $B(r)$ in (12. 9), (12. 10), which gives (2. 4), (2. 5) for $F(z)$, and (2. 6) with $B(r)$ instead of $b(r)$ also follows.

Suppose now $|r - \zeta| \leqq r[a(r)]^{-1}$. Then

$$g(\zeta) = O\left[f\left(r + \frac{r}{a(r)}\right)\right]^{1-\delta} = O[f(r)]^{1-\delta},$$

by Lemma 3 and (12. 6). Thus for every fixed positive integer n

$$(12.\ 12)\quad |g^{(n)}(r)| \leqq n!\left[\frac{a(r)}{r}\right]^n \max_{|\zeta - r| \leqq r[a(r)]^{-1}} |g(\zeta)| = \frac{O[a(r)]^n[f(r)]^{1-\delta}}{r^n} = \frac{O[f(r)]^{1-\frac{1}{2}\delta}}{r^n}$$

by Lemma 2 and Cauchy's inequalities. Thus

$$A(r) = r\,\frac{f'(r) + g'(r)}{f(r) + g(r)} = r\,\frac{f'(r)}{f(r)}\left[1 + O\left(\frac{g(r)}{f(r)}\right)\right]\left[1 + O\left(\frac{g'(r)}{f'(r)}\right)\right]$$

$$= a(r)\,\{1 + O[f(r)]^{-\frac{\delta}{2}}\} = a(r) + o(1), \text{ as } r \to R.$$

A further use of (12. 12) also shows that

$$B(r) = r\,\frac{d}{dr}\,A(r) = b(r) + r\,\frac{d}{dr}\,r\,\frac{g'(r)f(r) - f'(r)g(r)}{f(r)\,(f(r) + g(r))}$$

$$= b(r) + o(1), \text{ as } r \to R.$$

Thus the proof of Theorem IX is complete.

To prove the Corollary, note that any real polynomial $P(z)$ satisfies the hypotheses for $g(z)$ in Theorem IX. Thus $f(z) + P(z)$ is admissible.

Suppose next that

$$P(w) = b_0 + b_1 w + \cdots + b_m w^m,\ b_m > 0.$$

Then by repeated use of Theorem VII it follows that $[f(z)]^m$ is admissible and so is $b_m[f(z)]^m$ by Theorem VIII. Again if

$$g(z) = b_0 + b_1 f(z) + \cdots + b_{m-1}[f(z)]^{m-1},$$

then

$$M(r, g) = O[f(r)]^{m-1} = O\{b_m[f(r)]^m\}^{1-\frac{1}{m}}, \text{ as } r \to R.$$

Thus, by Theorem IX, $P[f(z)] = b_m[f(z)]^m + g(z)$ is also admissible, and this completes the proof of Theorem IX, Corollary.

13. Examples of admissible functions. Exponentials of polynomials. Having developed the theory of admissible functions to the present point, we proceed to give some examples.

THEOREM X. *Suppose that* $P(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_k z^k$, *where* $b_k \neq 0$, $k \geqq 1$, *is a polynomial with real coefficients and that*

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n = e^{P(z)}.$$

Then the following five conditions are equivalent.

(i) $f(z)$ *is admissible in the plane.*

(ii) *For all sufficiently large* r *we hawe*

$$|f(re^{i\theta})| < f(r),\ 0 < |\theta| \leqq \pi.$$

(iii) *For every integer* $d > 1$, *there exists an integer* m, *such that* d *is not a factor of* m *and* $b_m \neq 0$. *Further if* $m = m(d)$ *is the largest such integer, then* $b_{m(d)} > 0$.

(iv) *If* M_n *is defined as in* (1. 3) *we have*

$$a_n \sim \frac{M_n}{\sqrt{2\pi k n}},\quad \text{as } n \to +\infty.$$

(v) $a_n > 0$ *for all sufficiently large positive integers* n.

Corollary. *All the functions* (1. 1) *are admissible, and so their coefficients satisfy* (1. 5).

We proceed to prove the equivalence of (i) to (v).

(i) *implies* (ii). This is contained in Theorem V.

(ii) *or* (v) *implies* (iii). Suppose first that for some integer $d > 1$, $b_m = 0$ except when $d \mid m$. Then clearly we have

$$P(z) = b_0 + b_d z^d + b_{2d} z^{2d} + \cdots$$

and so

$$f(re^{[2\pi i/d]}) = f(r),$$

which contradicts (ii), and also $a_n = 0$ except when $d \mid n$, which contradicts (v). Thus we may exclude this case.

Suppose next that $b_{m(d)} < 0$ for some integer $d > 1$. Write

$$P(z) = u(z) + iv(z) = \sum_0^k b_m r^m (\cos m\theta + i \sin m\theta).$$

Then

$$u(re^{2\pi i/d}) - u(r) = b_{m(d)} r^{m(d)} \left[\cos\left(\frac{2\pi m(d)}{d}\right) - 1\right] + O(r^{m(d)-1}) > c\, r^{m(d)},$$

for all sufficiently large r, where c is a positive constant. Thus for large r

$$| f(re^{[2\pi i/d]}) | > f(r) \exp [cr^{m(d)}].$$

This clearly contradicts (ii). Also if (v) holds, we have

$$| f(re^{2\pi i/d}) | \leqq \sum_0^\infty | a_n | r^n \leqq \sum_0^\infty a_n r^n + O(r^N) < 2f(r),$$

for all large r, so that we again have a contradiction. This completes the proof.

(iii) *implies* (i). This is the crux of the proof of Theorem X. We define $a(r)$, $b(r)$ as in (2. 2), (2. 3), so that

$$a(r) = \sum_0^k m b_m r^m,$$

$$b(r) = \sum_0^k m^2 b_m r^m.$$

By (iii) we have $b_k > 0$, taking $d = k + 1$, and so (2. 6) holds. We also have as $r \to \infty$, uniformly for $| \theta | \leqq \pi$,

$$P(re^{i\theta}) = P(r) + i\theta a(r) - \tfrac{1}{2}\, \theta^2 b(r) + O(\theta^3 r^k), \tag{13. 1}$$

and so we obtain (2. 4) with $\delta(r) = r^{-\frac{k}{3} - \frac{1}{7}}$. Also for large r

$$\begin{aligned} | f(re^{i\delta(r)}) | &\sim f(r) \exp\left[-\tfrac{1}{2}\, b(r) r^{-2\left(\frac{k}{3} + \frac{1}{7}\right)}\right] \\ &< f(r) \exp\left[-\tfrac{1}{4}\, b_k\, r^{\left(\frac{k}{3} - \frac{2}{7}\right)}\right]; \end{aligned}$$

$$| f(re^{i\delta(r)}) | < f(r) \exp\left[-r^{\frac{1}{22}}\right]. \tag{13. 2}$$

To complete the proof of (2. 5), we have to show that for all large r, we have

$$| f(re^{i\theta}) | < f(r) \exp\left[-r^{\frac{1}{22}}\right], \quad \delta(r) \leqq | \theta | \leqq \pi, \tag{13. 3}$$

and in view of (13. 2) we may confine ourselves to those values of θ for which $\frac{\partial}{\partial\theta} | f(re^{i\theta}) | = 0$.

We set again $u = \log | f(re^{i\theta}) |$, so that

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\sum_0^k m b_m r^m \sin m\theta = -k b_k r^k \sin k\theta + O(r^{k-1}).$$

Thus $\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$ implies $k\theta = \nu\pi + O(r^{-1})$ for some integer ν.

Suppose first $\nu = 0$. Then we have

$$\delta(r) \leqq | \theta | \leqq \frac{O(1)}{r},$$

and so (13. 1), (13. 2) give for large r

$$| f(re^{i\theta}) | = f(r) \exp \{-[\tfrac{1}{2} b(r) + O(r^{k-1})]\, \theta^2\} < f(r) \exp \left\{-r^{\frac{1}{22}}\right\},$$

as required. Next suppose $1 \leqq \nu \leqq 2k - 1$ and write $\varphi = \theta - \nu\pi/k$, so that $\varphi = O(r^{-1})$, as $r \to \infty$. Let d be the smallest positive integer, such that $2k \mid d\nu$. Then [5])

$$u(re^{i\theta}) - u(re^{i\varphi}) = b_{m(d)} r^{m(d)} \left[\cos\left(\frac{\nu m(d)\pi}{k}\right) - 1\right] + O(r^{m(d)-1}),$$

and since (iii) holds we deduce from this and (13. 1) for all large r

$$u(re^{i\theta}) < u(re^{i\varphi}) - cr^{m(d)} < u(r) - cr^{m(d)},$$

where c is a positive constant, and this again implies (13. 3).

Thus (13. 3) always holds and this certainly implies

$$| f(re^{i\theta}) | < f(r) \exp \{-[b(r)]^{1/(23k)}\} < \frac{f(r)}{b(r)}, \quad \delta(r) \leqq | \theta | \leqq \pi,$$

for all large r. This proves (2. 5) and so $f(z)$ is admissible.

(iii) *implies* (iv). This follows from Theorem I, Corollary II, which gives as $n \to +\infty$,

$$a_n \sim \frac{f(r_n)}{r_n^n \sqrt{2\pi b(r_n)}} \sim \frac{M_n}{\sqrt{2\pi b(r_n)}},$$

by Theorem V. Also in this case

$$b(r_n) \sim k a(r_n) = kn, \text{ as } n \to +\infty,$$

so that (iv) follows.

(iv) *implies* (v). This is evident.

We have now shown that (i), (ii), (iii) are equivalent and implied by (v). Since also (iii) implies (iv) and (iv) implies (v), any one of the hypotheses (i) to (v) is equivalent to each of the others and the proof of Theorem X is complete.

14. Proof of the Corollary. The Corollary now follows from our earlier theorems. By Theorem X, $\exp\left(z + \frac{1}{2} z^2 + \cdots + \frac{1}{k} z^k\right)$ is admissible in the plane. Hence so is

$$f_k(z) = (z - 1) \exp\left(z + \cdots + \frac{1}{k} z^k\right) + 1,$$

by Theorem VIII and the Corollary to Theorem X. Suppose now that $\varphi(z) = f_{k_1, \ldots, k_p}(z)$ has already been proved to be admissible. Then so is

$$\psi(z) = \varphi + \frac{1}{2} \varphi^2 + \cdots + \frac{1}{k_1} \varphi^{k_1},$$

[5]) In fact if $\frac{2k}{\nu} = \frac{r}{s}$ in its lowest terms, then $d = r$; and $\frac{\nu m}{k}$ is an even integer, i.e. $\cos(\nu m\pi/k) = 1$, if and only if $r \mid m$.

by Theorem IX, Corollary and so also are $\exp[\psi(z)]$ by Theorem VI and $\varphi(z)-1$ by Theorem VIII, Corollary and hence so is $(\varphi(z)-1)\exp[\psi(z)]$ by Theorem VII and finally

$$f_{k_1,k_2,\ldots,k_p}(z) = (\varphi(z)-1)\exp[\psi(z)]+1,$$

by Theorem IX, Corollary again. This completes the proof by induction, that the functions (1. 1) are admissible.

Some elementary estimations show that for $f_{k_1,k_2,\ldots,k_p}(z)$

$$b(r_n) \sim k_p n \log n \cdots \log_{(p-1)} n, \quad \text{as } n \to +\infty,$$

so that (1. 5) yields for the coefficients of these functions

$$a_n \sim M_n[2\pi k_p n \log n \cdots \log_{(p-1)} n]^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{as } n \to +\infty.$$

It is in general not possible to obtain a correspondingly simple asymptotic formula for M_n, if $p>1$. For the functions of Theorem X, or if $p=1$ in (1. 1), we can do so however. If for instance $k=2$, $b_1>0$, $b_2>0$, in that theorem, then taking $r=(n/2b_2)^{\frac{1}{2}}$ in Theorem I, we deduce

$$a_n \sim \frac{1}{\sqrt{4\pi n}} \exp\left(-\frac{b_1^2}{8b_2}\right)\frac{f(r)}{r^n}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi n}} \exp\left\{-\frac{n}{2}\log\left(\frac{n}{2b_2}\right)+\frac{1}{2}n+b_1\left(\frac{n}{2b_2}\right)^{\frac{1}{2}}+b_0-\frac{b_1^2}{8b_2}\right\}.$$

15. Integral functions of genus zero. By means of Theorem X, we have achieved our original aim of proving that the class of admissible functions, which has the simple coefficient behaviour described by Theorem I, includes the functions (1. 1). We can now increase our basic material of admissible functions (which can then be further extended by the use of Theorems VI to X) by proving

THEOREM XI. *Suppose that $f(z)$ is an integral function of genus zero, positive for large positive z, having for some positive δ at most a finite number of zeros in the angle $|\arg z| \leqq \frac{\pi}{2}+\delta$, and such that*

$$b(r) = r\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}\log f(r) \to +\infty, \quad \textit{as } r \to +\infty. \tag{15. 1}$$

Then $f(z)$ is admissible in the plane.

We may suppose without loss in generality, that $f(z)$ has no zeros in the closed angle $|\arg z| \leqq \frac{\pi}{2}+\delta$, since otherwise

$$f(z) = f_1(z)\,P(z),$$

where $f_1(z)$ has no zeros in the angle and $P(z)$ is a polynomial which is positive for large positive z. Clearly $f_1(z)$ satisfies the hypotheses of Theorem XI, if $f(z)$ does. If we prove that $f_1(z)$ is admissible, it will follow that $f(z)$ is admissible by Theorem VIII.

Let $-z_m$ be the zeros of $f(z)$. Then

$$f(z) = f(0)\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{z_m}\right). \tag{15. 2}$$

This gives

$$a(z) = z\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{z}{z+z_m},$$

$$b(z) = z\,a'(z) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{zz_m}{(z+z_m)^2}. \tag{15. 3}$$

It is sufficient to verify that (2. 4), (2. 5) are satisfied with $\delta(r) = [b(r)]^{-\frac{2}{5}}$, since the other conditions for admissibility are contained in the assumptions of Theorem XI. We shall need two preliminary results.

Lemma 7. *With the above notation, we have for positive r*

$$b(r) > \sin\delta \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r\,|z_m|}{(r+|z_m|)^2}, \tag{15. 4}$$

while for $\operatorname{Re} z > 0$, *we have*

$$|b(z)| \leqq \operatorname{cosec}^2 \frac{\delta}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|z|\,|z_m|}{(|z|+|z_m|)^2}. \tag{15. 5}$$

By hypothesis $f(z)$ is real for real z. Thus the zeros of $f(z)$ are either real and negative or occur in complex conjugate pairs. Suppose that $-z_m = -r_m$ is a negative zero. Then if $r > 0$,

$$\frac{rz_m}{(r+z_m)^2} = \frac{r\,|z_m|}{(r+|z_m|)^2} > \sin\delta\,\frac{r\,|z_m|}{(r+|z_m|)^2},$$

as required. Suppose next that $-z_m, -\bar{z}_m$ are two conjugate complex zeros, where $z_m = r_m e^{i\theta_m}$, $|\theta_m| < \frac{\pi}{2} - \delta$. Then if $r > 0$

$$\frac{rz_m}{(r+z_m)^2} + \frac{r\bar{z}_m}{(r+\bar{z}_m)^2} = \frac{2rr_m[(r^2+r_m^2)\cos\theta_m + 2rr_m]}{[r^2+2rr_m\cos\theta_m + r_m^2]^2}$$
$$> \frac{2rr_m \sin\delta (r+r_m)^2}{(r+r_m)^4} = 2\sin\delta\,\frac{r\,|z_m|}{(r+|z_m|)^2}.$$

Thus if, in the series (15. 3) for $b(r)$, we take care to bracket terms corresponding to complex conjugate zeros together, we obtain (15. 4).

Next, let $-z_m = -r_m e^{i\theta_m}$ be a zero of $f(z)$ with $|\theta_m| \leqq \frac{\pi}{2} - \delta$, and let $z = re^{i\theta}$, $|\theta| \leqq \frac{\pi}{2}$. Then

$$\frac{|zz_m|}{|z+z_m|^2} = \frac{rr_m}{r^2+r_m^2+2rr_m\cos(\theta+\theta_m)} \leqq \frac{rr_m}{r^2+r_m^2-2rr_m\cos\delta}$$
$$= \frac{rr_m}{\sin^2\frac{\delta}{2}(r+r_m)^2 + \cos^2\frac{\delta}{2}(r-r_m)^2} \leqq \operatorname{cosec}^2\frac{\delta}{2}\,\frac{rr_m}{(r+r_m)^2}.$$

Now (15. 5) follows from this and (15. 3) by the triangle inequality. This proves Lemma 7.

Lemma 8. *Suppose that* $|\theta_0| \leqq 2\delta$. *Then we have*

$$|f(re^{i\theta})| \leqq |f(re^{i\theta_0})|, \quad 0 < r < \infty, \quad |\theta_0| \leqq |\theta| \leqq \pi.$$

Let $-r_m e^{i\theta_m}$ be a zero of $f(z)$, so that $|\theta_m| \leqq \frac{\pi}{2} - \delta$. We show that

$$t_m(\theta) = \left|1 + \frac{r}{r_m}\,e^{i(\theta-\theta_m)}\right|^2 \left|1 + \frac{r}{r_m}\,e^{i(\theta+\theta_m)}\right|^2$$

has its greatest value in the range $|\theta_0| \leqq |\theta| \leqq \pi$, when $\theta = \mp\theta_0$. It follows from (15. 2), on bracketing conjugate factors together, that

$$|f(re^{i\theta})|^4 = [f(0)]^4 \prod_{m=1}^{\infty} t_m(\theta),$$

so that Lemma 8 will follow.

Set $\varrho = r/r_m$. Then

$$t_m(\theta) = [1 + \varrho^2 + 2\varrho\cos(\theta - \theta_m)]\,[1 + \varrho^2 + 2\varrho\cos(\theta + \theta_m)]$$
$$= (1 + \varrho^2)^2 + 4\varrho(1 + \varrho^2)\cos\theta\cos\theta_m + 2\varrho^2(\cos 2\theta + \cos 2\theta_m).$$

Thus

$$t_m'(\theta) = -4\varrho\sin\theta\,[(1 + \varrho^2)\cos\theta_m + 2\varrho\cos\theta].$$

It follows that the only possible maxima of $t_m(\theta)$ in the range $0 \leqq \theta \leqq \pi$ occur at $\theta = 0, \pi$. Thus it is sufficient to prove that $t_m(\pi) < t_m(\theta_0)$.

To see this, note that

$$t_m(\pi) = [1 + \varrho^2 - 2\varrho\cos\theta_m]^2,$$
$$t_m(\theta_0) = [1 + \varrho^2 + 2\varrho\cos(\theta_0 - \theta_m)]\,[1 + \varrho^2 + 2\varrho\cos(\theta_0 + \theta_m)],$$

and for $|\theta_0| < 2\delta$, $|\theta_m| < \frac{\pi}{2} - \delta$, we have

$$\cos(\theta_0 \mp \theta_m) > \cos\left(\frac{\pi}{2} + \delta\right) = -\sin\delta \geqq -\cos\theta_m.$$

Thus Lemma 8 is proved.

We can now prove (2. 4), (2. 5) with $\delta(r) = [b(r)]^{-\frac{2}{5}}$. It follows from Lemma 7, that for $|z - r| < \frac{1}{2}r$ we have

$$|b(z)| < \operatorname{cosec}^2\frac{\delta}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|z|\,|z_m|}{(|z| + |z_m|)^2}$$
$$< 4\operatorname{cosec}^2\frac{\delta}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r\,|z_m|}{(r + |z_m|)^2}$$
$$< A(\delta)\,b(r),$$

where $A(\delta) = 4\operatorname{cosec}^2\frac{\delta}{2}\operatorname{cosec}\delta$. We now apply Lemma 4 with $\eta = \frac{1}{4}$, $C = A(\delta)$, and deduce for $|\theta| \leqq \frac{1}{4}$,

$$\log f(re^{i\theta}) = \log f(r) + i\theta a(r) - \tfrac{1}{2}\theta^2 b(r) + \varepsilon(r, \theta), \tag{15. 6}$$

where

$$|\varepsilon(r, \theta)| \leqq 2A(\delta)\,b(r)\,|\theta|^5 = o(1),$$

uniformly as $r \to \infty$ for $|\theta| \leqq [b(r)]^{-\frac{2}{5}}$. This proves (2. 4).

Again if r is so large that $[b(r)]^{-\frac{2}{5}} \leqq 2\delta$, it follows from Lemma 8, that for $\delta(r) = [b(r)]^{-\frac{2}{5}} \leqq |\theta| \leqq \pi$ we have

$$\log|f(re^{i\theta})| \leqq \log|f(re^{i\delta(r)})| = \log f(r) - \tfrac{1}{2}[b(r)]^{\frac{1}{5}} + o(1), \quad \text{as } r \to \infty,$$

and this yields (2. 5). Thus the proof of Theorem XI is complete.

16. Two examples. As an application of Theorem XI, consider Riemann's function $\Xi(t)$, defined in terms of $\zeta(s) = \sum_1^{\infty} n^{-s}$ by the equations[6])

$$\Xi(t) = \xi(\tfrac{1}{2} + it), \tag{16. 1}$$
$$\xi(s) = \tfrac{1}{2}s(s - 1)\,\pi^{-\frac{1}{2}s}\,\Gamma(\tfrac{1}{2}s)\,\zeta(s). \tag{16. 2}$$

[6]) See e. g. *E. C. Titchmarsh*, The Theory of the Riemann Zeta-Function, Oxford 1951, p. 16.

Then $\mathfrak{Z}(t)$ is an even integral function of t of order 1, whose zeros lie in the strip $|\operatorname{Im}(t)| \leq \frac{1}{2}$. Thus

$$f(z) = \mathfrak{Z}(iz^{\frac{1}{2}})$$

satisfies the hypotheses of Theorem XI.

In fact it follows from (16. 1), (16. 2) and Stirling's formula for the Gamma-function[7]) that

$$\log f(z) = \frac{1}{2} z^{\frac{1}{2}} \log\left(\frac{z^{\frac{1}{2}}}{2\pi e}\right) + \frac{7}{8} \log z + \frac{1}{4} \log \frac{\pi}{2} + o(1), \tag{16. 3}$$

as $|z| \to \infty$, uniformly for $|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \delta$, and so

$$a(r) \sim \frac{1}{8} r^{\frac{1}{2}} \log r,$$

$$b(r) \sim \frac{1}{16} r^{\frac{1}{2}} \log r \sim \frac{1}{2} a(r), \quad \text{as } r \to +\infty.$$

Thus we may apply Theorem I, and obtain for the coefficients a_n of $f(z)$

$$a_n \sim \frac{M_n}{\sqrt{\pi n}}, \quad \text{as } n \to +\infty, \tag{16. 4}$$

where

$$M_n = \inf_{r>0} \frac{f(r)}{r^n} \sim \inf_{r>1} \exp\left\{\frac{1}{2} r^{\frac{1}{2}} \log\left(\frac{r^{\frac{1}{2}}}{2\pi e}\right) - \left(n - \frac{7}{8}\right) \log r + \frac{1}{4} \log \frac{\pi}{2}\right\},$$

by (16. 3). Also

$$\mathfrak{Z}(t) = f(-t^2) = \sum_0^\infty (-1)^n a_n t^{2n},$$

where the a_n satisfy (16. 4).

Theorem XI breaks down for functions of genus 1. As an example we describe briefly the behaviour of the coefficients of

$$f(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{m=1}^\infty \left(1 + \frac{z}{m}\right) e^{-\left(\frac{z}{m}\right)} = \sum_{n=1}^\infty a_n z^n.$$

Detailed proofs are easily obtained from Stirling's formula[7]) for $\Gamma(z)$ and a saddlepoint technique for the integral

$$a_n = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi r^n} \int_0^\pi f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta,$$

similar to that used for the proof of Theorem I.

If we define θ_n in the range $\frac{\pi}{2} < \theta_n < \pi$ by the equation

$$\theta_n \operatorname{cosec} \theta_n \, e^{-\theta_n \cot \theta_n} = n - \tfrac{1}{2},$$

and use the notation of the introduction, then as $n \to +\infty$

$$M_n \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\left(n - \frac{1}{2}\right)\left[1 + \frac{\sin(2\theta_n)}{2\theta_n} + \frac{2\theta_n}{\sin(2\theta_n)}\right]\right\}$$

and as $r \to \infty$,

$$b(r) \sim a(r) \sim \log M(r) \sim r \log r,$$

so that

$$b(r_n) \sim n.$$

[7]) See e. g. *E. C. Titchmarsh*, The Theory of Functions, 2nd edition Oxford 1939, p. 151.

Further if

$$v_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sin^2 \theta_n}{\theta_n} - \theta_n\right),$$

we shall have for a positive constant δ

$$a_n = \frac{M_n}{\sqrt{2\pi n}} [2 \cos v_n + O(n^{-\delta})], \quad \text{as } n \to +\infty.$$

We find that

$$v_{n+1} - v_n = -\theta_n + \frac{O(1)}{(\log n)^2} = -\pi\left(1 - \frac{1 + o(1)}{\log n}\right).$$

Thus there is a sequence of integers $n_p \to +\infty$ such that

$$n_{p+1} - n_p \sim \log n_p,$$

and a_{n_p}, a_{n_p+1} have the same sign, while $(-1)^n a_n$ has constant sign for $n_p + 1 \leqq n \leqq n_{p+1}$. This compares with (1. 5), which would yield

$$a_n \sim \frac{M_n}{\sqrt{2\pi n}}.$$

The largest term $\mu(r)$ in the series for $f(r)$ satisfies

$$\mu(r) \sim \frac{2M(r)}{\sqrt{2\pi b(r)}} \sim \frac{2M(r)}{\sqrt{2\pi \log M(r)}},$$

in contrast with the asymptotic equality

$$\mu(r) \sim \frac{M(r)}{\sqrt{2\pi b(r)}},$$

which holds for admissible functions by Theorem I, Corollary III.

A similar method may be applied to the coefficients of the integral functions $\zeta(s) - 1/(s-1)$ or $(s-1)\,\zeta(s)$, when they are expanded as Taylor series about a point on the real axis.

17. Functions in the unit circle [8]**.** We finally give a class of functions admissible in the unit circle.

THEOREM XII. *Suppose $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ is regular in $|z| < 1$, positive in some range $r_0 < z < 1$, and that there exist positive constants α, β, $\beta < 1$, and a positive function $C(r)$, $0 < r < 1$, satisfying*

$$(1 - r)\frac{C'(r)}{C(r)} \to 0, \quad \text{as } r \to 1,$$

and such that

$$\log f(z) \sim C(|z|)\,(1 - z)^{-\alpha},$$

as $z \to 1$, uniformly for $|\arg z| \leqq \beta(1 - r)$.

Suppose further that for r sufficiently near 1

$$|f(re^{i\theta})| \leqq |f(re^{i\beta(1-r)})|, \quad \beta(1 - r) \leqq |\theta| \leqq \pi.$$

Then $f(z)$ is admissible in $|z| < 1$.

---

[8]) In this connection see also *A. J. Macintyre* and *R. Wilson*, Math. Ann. **127** (1954), 243—250, where the coefficients of $[\log(1-z)]^\beta (1-z)^{-\alpha} \exp[\gamma/(1-z)]$ and similar functions are considered. There γ may be complex, but for positive γ their results may be deduced from Theorem XII.

For $C(r)$ we may choose a function such as $\beta_1\left(\log\frac{1}{1-r}\right)^{\beta_2}\left(\log\log\frac{1}{1-r}\right)^{\beta_3}\ldots$, so that functions such as

$$f(z) = \exp\left[\beta_1(1-z)^{-\alpha}\left(\log\frac{2}{1-z}\right)^{\beta_2}\left(\log\log\frac{2e}{1-z}\right)^{\beta_3}\ldots\right]$$

where $\beta_1 > 0, \beta_2, \beta_3, \ldots$, are real constants, are admissible in $|z| < 1$.

To prove Theorem XII, note that our hypotheses on $C(r)$ imply that if $0 < r < \varrho < 1$, then

$$(17.1)\qquad \log C(\varrho) - \log C(r) = o\left(\int_\varrho^r \frac{dt}{1-t}\right) = o\left(\log\frac{1-r}{1-\varrho}\right), \quad \text{as } r, \varrho \to 1.$$

Thus if $|r-\varrho| < \frac{\beta}{4}(1-r)$ we have

$$C(\varrho) \sim C(r), \quad \text{as } r \to 1,$$

and so

$$\log f(z) \sim C(r)(1-z)^{-\alpha},$$

as $r \to 1$ and $|z-r| < \frac{1}{4}\beta(1-r)$. Hence,

$$\varepsilon_r(z) = \log f(z) - C(r)(1-z)^{-\alpha} = o\{C(r)(1-r)^{-\alpha}\},$$

in $|z-r| < \frac{1}{4}\beta(1-r)$ as $r \to 1$, and so

$$\varepsilon_r'(z) = o[C(r)](1-r)^{-\alpha-1},$$
$$\varepsilon_r''(z) = o[C(r)](1-r)^{-\alpha-2},$$

while $|z-r| < \frac{1}{8}\beta(1-r)$. Thus

$$a(z) = z\frac{f'(z)}{f(z)} \sim \alpha C(r)(1-z)^{-\alpha-1},$$
$$b(z) = za'(z) \sim \alpha(\alpha+1)C(r)(1-z)^{-\alpha-2},$$

as $r \to 1$ while $|z-r| < \frac{1}{8}\beta(1-r)$. Hence we have, if r is sufficiently near 1 and $|z-r| < \frac{1}{8}\beta(1-r)$,

$$|b(z)| < A(\alpha, \beta)\, b(r),$$

where $A(\alpha, \beta)$ denotes here and subsequently a constant depending on α, β only, not necessarily the same each time.

We now apply Lemma 4 to $f(z)$ with $\eta = \frac{\beta(1-r)}{16r}$. Thus

$$(17.2)\qquad \log f(re^{i\theta}) = \log f(r) + i\theta a(r) - \tfrac{1}{2}\theta^2 b(r) + \varepsilon(r, \theta),$$

where

$$|\varepsilon(r, \theta)| < \frac{A(\alpha, \beta)\,|\theta|^3 b(r)}{2\eta} < A(\alpha, \beta)\,|\theta|^3 C(r)(1-r)^{-\alpha-3},$$

provided that

$$|\theta| < \frac{\beta(1-r)}{16r}.$$

Take now

$$\delta(r) = (1-r)^{1+\frac{2\alpha}{5}}.$$

Then we have, as $r \to 1$, while $|\theta| \leqq \delta(r)$

$$\varepsilon(r, \theta) = O[C(r)]\,(1-r)^{\frac{\alpha}{5}} = o(1),$$

in view of (17. 1). Thus (17. 2) yields (2. 4), with this value of $\delta(r)$.

Next (17. 2) gives for $\delta(r) \leqq |\theta| \leqq A(\alpha, \beta)\,(1-r)$

$$\log|f(re^{i\theta})| \leqq \log f(r) - \tfrac{1}{4}\,b(r)\,\theta^2 \leqq \log f(r) - \tfrac{1}{4}\,b(r)\,[\delta(r)]^2$$
$$< \log f(r) - A(\alpha, \beta)\,C(r)\,(1-r)^{-\frac{\alpha}{5}} < \log f(r) - [b(r)]^{\frac{\alpha}{10(\alpha+2)}},$$

if r is sufficiently near 1, and this implies (2. 5). If $A(\alpha, \beta)\,(1-r) \leqq |\theta| \leqq \beta(1-r)$, the hypotheses of Theorem XII imply

$$\log\left(\frac{|f(re^{i\theta})|}{f(r)}\right) \sim \left|\frac{1-re^{i\theta}}{1-r}\right|^{-\alpha} = \left[1 + \frac{2r\sin^2\frac{\theta}{2}}{(1-r)^2}\right]^{-\frac{\alpha}{2}} < 1 - A(\alpha, \beta),$$

and so in this range

$$\log|f(re^{i\theta})| < \log f(r) - A(\alpha, \beta)\,C(r)\,(1-r)^{-\alpha}$$
$$< \log f(r) - [b(r)]^{\alpha/(\alpha+3)},$$

if r is sufficiently near 1. The same inequality therefore also holds in the range $\beta(1-r) \leqq |\theta| \leqq \pi$, by our hypotheses. Thus (2. 5) holds uniformly for $\delta(r) \leqq |\theta| \leqq \pi$, and since the other conditions for admissibility are satisfied, $f(z)$ is admissible in $|z| < 1$.

18. An application in the theory of subordination. As an application of Theorem XII, we prove the following

THEOREM XIII. *Suppose that* $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ *is regular in* $|z| < 1$ *and satisfies* $|f(z)| > 1$ *there. Let*

$$F(z) = |a_0|^{\frac{1+z}{1-z}} = |a_0| + \sum_{n=1}^\infty A_n z^n.$$

Then $|a_n| \leqq A_n$ *for every* $n \geqq 1$, *and*[9])

$$A_n \sim \left(\frac{\log|a_0|}{8\pi^2 n^3}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(8n\log|a_0|^{\frac{1}{2}}\right), \quad \textit{as } n \to +\infty.$$

The bounds $|a_n| \leqq A_n$ are exact, for every fixed $n \geqq 1$, and $|a_0| > 1$, since $F(z)$ satisfies the conditions for $f(z)$. To obtain them, note that with the hypotheses of Theorem XIII

$$g(z) = \log f(z) = \log|a_0| + i\arg a_0 + \sum_{n=1}^\infty b_n z^n$$

has positive real part in $|z| < 1$, and so, by a classical theorem of Borel, we have[10])

$$|b_n| \leqq 2\log|a_0|,$$

while

$$G(z) = \log F(z) = (\log|a_0|)\left(1 + 2\sum_{n=1}^\infty z^n\right).$$

---

[9]) This asymptotic expansion is contained in *Macintyre* and *Wilson*, loc. cit.[8]), formula (10), p. 246.

[10]) See e. g. *J. E. Littlewood*, Lectures on the theory of functions, Oxford 1944, p. 114.

Also

$$\frac{f(z)}{a_0} = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n\right) = 1 + (\sum b_n z^n) + \frac{1}{2}(\sum b_n z^n)^2 + \cdots,$$

so that the a_n/a_0 are polynomials in the b_n with positive coefficients.

Thus $|a_n|$ attains its maximum value A_n, when all the b_n are equal to $2\log|a_0|$.

To prove the asymptotic equality for A_n, note that

$$\log F(z) = \frac{1+z}{1-z}\log|a_0| \sim \frac{2}{1-z}\log|a_0|,$$

as $z \to 1$ in any manner, and $|F(re^{i\theta})|$ decreases with increasing θ for $0 \leqq \theta \leqq \pi$. Thus $F(z)$ is admissible in $|z| < 1$ by Theorem XII. Also, putting $A = \log|a_0|$, we have

$$a(r) = r\frac{F'(r)}{F(r)} = \frac{2Ar}{(1-r)^2}, \quad b(r) = ra'(r) = \frac{2Ar(1+r)}{(1-r)^3}.$$

We define r by the equation

$$\frac{2A}{(1-r)^2} = n \quad \text{or} \quad \frac{1}{1-r} = \left(\frac{n}{2A}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Then as $n \to \infty$, $r \to 1$

$$\log F(r) = A\frac{1+r}{1-r} = A\left[2\left(\frac{n}{2A}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right] = (2An)^{\frac{1}{2}} - A,$$

$$-n\log r = -n\log\left[1 - \left(\frac{2A}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right] = (2An)^{\frac{1}{2}} + A + o(1),$$

$$\frac{(a(r)-n)^2}{2b(r)} = O(1-r)^{-2}(1-r)^3 = o(1).$$

Thus Theorem I gives as $n \to \infty$, and so $r \to 1$,

$$A_n \sim \frac{F(r)}{r^n\sqrt{2\pi b(r)}} \sim \frac{\exp[(2An)^{\frac{1}{2}} - A + (2An)^{\frac{1}{2}} + A + o(1)]}{[8\pi A(1-r)^{-3}]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\sim \left(\frac{A}{8\pi^2 n^3}\right)^{\frac{1}{4}} \exp(8An)^{\frac{1}{2}}.$$

This completes the proof of Theorem XIII.

Finally we may remark that the method employed in proving Theorem I extends to many cases of functions with complex coefficients or real coefficients with varying signs. In such cases we put

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\, e^{-in\theta}\, d\theta,$$

and if r is suitably chosen to depend on n, the effective contribution to the integral on the right hand side derives from a few small arcs near the points where the maximum modulus is attained. An example of this method, as applied to $[1/\Gamma(z)]$, was given in section 16. It is essentially a simple case of a Hardy-Littlewood technique.

The University Exeter,
February, 1955.

Eingegangen 5. April 1955.

Beispiele von wesentlichen Komponenten, die keine Basen sind.

Von *Alfred Stöhr* in Göttingen und *Eduard Wirsing* in Berlin.

1. Man sagt, eine Zahlenmenge $\mathfrak{W}$ sei eine wesentliche Komponente, wenn sie, irgendeiner Zahlenmenge von positiver Dichte hinzuaddiert, deren Dichte stets erhöht. Die Entdeckung, daß die Menge der Quadratzahlen diese Eigenschaft hat, gab Chintschin Anlaß zur Schaffung dieses Begriffs. Interessant wurde der Begriff vor allem dadurch, daß Erdös [1] 1936 zeigte, daß *jede Basis* eine wesentliche Komponente ist. Die Frage, ob damit schon alle wesentlichen Komponenten erfaßt sind, wurde 1942 von Linnik [2] geklärt, der ein Beispiel einer wesentlichen Komponente angab, die Nichtbasis ist. Der recht komplizierte Beweis geschieht durch Abschätzung Weylscher Summen. Im folgenden soll eine elementare Konstruktion solcher Beispiele gegeben werden. Als Hilfsmittel ziehen wir den genannten Satz von Erdös heran und die Erkenntnis, daß man zu beliebigem natürlichem h und k Basen $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_k$ der h-ten Ordnung angeben kann, so daß auch deren Summe $\mathfrak{S} = \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2 + \cdots + \mathfrak{B}_k$ noch Basis genau h-ter Ordnung ist. Das Verfahren liefert sogar noch mehr; wir können eine Menge $\mathfrak{W}$ z. B. so angeben, daß sie jede Menge positiver asymptotischer Dichte bei Addition in eine solche der asymptotischen Dichte 1 überführt.

2. Wir gebrauchen folgende Definitionen:

Es sei $\mathfrak{Z} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ die Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{W}$ usw. Untermengen davon.

$[k, l]$ sei die Menge $\{k, k+1, \ldots, l\}$.

$A(x)$, $B(x)$ usw. seien die Anzahlen der Elemente von $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$, die > 0 und $\leqq x$ sind.

$\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ sei die Menge aller Zahlen $a + b$ mit $a \in \mathfrak{A}$, $b \in \mathfrak{B}$. Entsprechend sei $h\mathfrak{A} = \mathfrak{A} + \mathfrak{A} + \cdots + \mathfrak{A}$ (h Summanden). Ist $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ oder $\mathfrak{D} = h\mathfrak{A}$, so schreiben wir für $C(x)$ auch $(A + B)(x)$, für $D(x)$ auch $(hA)(x)$ usw.

$\mathfrak{B}$ heißt *Basis* (*der Ordnung h*), wenn es ein h gibt, so daß $h\mathfrak{B} = \mathfrak{Z}$ ist. Danach kann $\mathfrak{B}$ keine Basis sein, wenn nicht $\{0, 1\} \in \mathfrak{B}$ gilt; $\mathfrak{B}$ kann dann aber noch *Basis im Großen* sein, womit wir meinen, daß $h\mathfrak{B}$ für festes geeignetes h alle genügend großen Zahlen enthält.

Als (*finite*) *Dichte* bzw. *asymptotische Dichte* bezeichnet man

$$\delta(\mathfrak{A}) = \operatorname*{fin}_{n=1,2,\ldots} \frac{A(n)}{n} \quad \text{bzw.} \quad \delta^*(\mathfrak{A}) = \lim_{n=1,2,\ldots} \frac{A(n)}{n}.$$

$\mathfrak{W}$ ist eine *wesentliche Komponente*, wenn aus $0 < \delta(\mathfrak{A}) < 1$ stets $\delta(\mathfrak{A} + \mathfrak{W}) > \delta(\mathfrak{A})$ folgt.

Für jede feste Zahlenmenge $\mathfrak{W}$ definieren wir ferner zwei Funktionen $\varphi(\alpha) = \varphi(\alpha, \mathfrak{W})$ und $\varphi^*(\alpha) = \varphi^*(\alpha, \mathfrak{W})$, die wir die (*finite*) *Wirkungsfunktion* bzw. die *asymptotische Wirkungsfunktion* von $\mathfrak{W}$ nennen wollen, indem wir setzen:

$$\varphi(\alpha) = \underset{\mathfrak{A}}{\mathrm{fin}}\, \delta(\mathfrak{A} + \mathfrak{W}), \quad \text{wo } \mathfrak{A} \text{ alle Mengen mit } \delta(\mathfrak{A}) \geqq \alpha \text{ durchläuft;}$$

$$\varphi^*(\alpha) = \underset{\mathfrak{A}}{\mathrm{fin}}\, \delta^*(\mathfrak{A} + \mathfrak{W}), \quad \text{wo } \mathfrak{A} \text{ alle Mengen mit } \delta^*(\mathfrak{A}) \geqq \alpha \text{ durchläuft.}$$

3. Der Satz von Erdös lautet:

Ist $\mathfrak{B}$ eine Basis h-ter Ordnung und $\delta(\mathfrak{A}) = \alpha$, so ist

$$\delta(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \geqq \alpha + \frac{\alpha(1-\alpha)}{2h}.$$

Mit anderen Worten: Setzt man $\psi_h(\alpha) = \alpha + \dfrac{\alpha(1-\alpha)}{2h}$, so ist

$$\varphi(\alpha, \mathfrak{B}) \geqq \psi_h(\alpha).$$

(Schärfere Abschätzungen sind bekannt, werden aber für unseren Zweck nicht benötigt.)

Für eine Summe $\mathfrak{S} = \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2 + \cdots + \mathfrak{B}_k$ von k Basen h-ter Ordnung erhält man daraus als untere Abschätzung für $\delta(\mathfrak{A} + \mathfrak{S})$ die Funktion $\psi_h^{(k)}(\alpha)$, die durch k-fache Iteration aus $\psi_h(\alpha)$ entsteht. Wird k bei festem h genügend groß gewählt, so schmiegt sich das Bild der Funktion $\psi_h^{(k)}(\alpha)$ dem Dreieck $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ beliebig gut an. Setzen wir

$$\psi(\alpha) = \psi_1(\alpha) = \alpha + \frac{\alpha(1-\alpha)}{2}$$

(also $\alpha < \psi(\alpha) < 1$ für $0 < \alpha < 1$), so können wir zu jedem h ein k_h derart wählen, daß $\psi_h^{(k_h)}(\alpha) \geqq \psi(\alpha)$ gilt[1]). Wie oben schon gesagt, können wir Basen $\mathfrak{B}_{1h}, \mathfrak{B}_{2h}, \ldots, \mathfrak{B}_{kh}$ so wählen, daß $\mathfrak{S}_h = \mathfrak{B}_{1h} + \mathfrak{B}_{2h} + \cdots + \mathfrak{B}_{kh}$ selbst Basis genau h-ter Ordnung ist; wir können sogar erreichen, daß $\big((h-1)S_h\big)(x) = o(x)$ ist (Stöhr [3]). Dann gilt also

$$\delta(\mathfrak{A} + \mathfrak{S}_h) \geqq \psi_h^{(k_h)}(\alpha) \geqq \psi(\alpha) \text{ für alle } h.$$

Wir nehmen nun von jeder Menge $\mathfrak{S}_h$ einen Anfang und reihen diese zu einer neuen Menge $\mathfrak{W}$ aneinander:

m_η seien ganze Zahlen; $0 = m_0 < m_1 < m_2 < \cdots$. Wir setzen

$$\mathfrak{W} = \bigcup_{\eta=1}^{\infty} \big((\{m_{\eta-1}\} + \mathfrak{S}_\eta) \cap [0, m_\eta - 1]\big).$$

$\mathfrak{W}$ ist eine wesentliche Komponente; denn aus

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} + \mathfrak{W} &= \mathfrak{A} + \bigcup_{\eta=1}^{\infty} \big((\{m_{\eta-1}\} + \mathfrak{S}_\eta) \cap [0, m_\eta - 1]\big)\\ &\geqq \bigcup_{\eta=1}^{\infty} \big((\{m_{\eta-1}\} + \mathfrak{S}_\eta + \mathfrak{A}) \cap [0, m_\eta - 1]\big)\end{aligned}$$

folgt für $\delta(\mathfrak{A}) = \alpha$ und $m_{h-1} \leqq n < m_h$

$$\begin{aligned}(A + W)(n) &\geqq \sum_{\eta=1}^{h-1} (A + S_\eta)(m_\eta - m_{\eta-1}) + (A + S_h)(n - m_{h-1})\\ &\geqq \sum_{\eta=1}^{h-1} (m_\eta - m_{\eta-1})\, \delta(\mathfrak{A} + \mathfrak{S}_\eta) + (n - m_{h-1})\, \delta(\mathfrak{A} + \mathfrak{S}_h)\\ &\geqq \sum_{\eta=1}^{h-1} (m_\eta - m_{\eta-1})\, \psi(\alpha) + (n - m_{h-1})\, \psi(\alpha)\\ &= n\psi(\alpha),\end{aligned}$$

[1]) Eine nähere Untersuchung zeigt, daß $k_h = 2h$ gewählt werden kann; doch ist dies für den Beweis unerheblich.

und da hierin n beliebig war,

$$\delta(\mathfrak{A}+\mathfrak{W}) = \operatorname*{fin}_{n=1,2,\ldots} \frac{(A+W)(n)}{n} \geqq \psi(\alpha) > \alpha.$$

Wir zeigen nun, daß $\mathfrak{W}$ keine Basis ist, wenn die m_η genügend stark gegen ∞ wachsen. $m_0 = 0, m_1, m_2, \ldots, m_{h-1}$ mögen schon bestimmt sein. Da $(h-1)\,\mathfrak{S}_h$ die Dichte Null hat, gilt dasselbe für

$$[0, (h-1)\,m_{h-1}] + (h-1)\,\mathfrak{S}_h = (h-1)\,([0, m_{h-1}] + \mathfrak{S}_h).$$

Wir wählen m_h so groß, daß $[0, m_h - 1] \cap (h-1)\,([0, m_{h-1}] + \mathfrak{S}_h)$ echte Teilmenge von $[0, m_h - 1]$ ist. Sind alle m_η nach dieser Vorschrift gewählt, so folgt für beliebiges h

$$\begin{aligned}[0, m_h - 1] \cap (h-1)\,\mathfrak{W} &= [0, m_h - 1] \cap (h-1) \bigcup_{\eta=1}^{h} (\{m_{\eta-1}\} + \mathfrak{S}_\eta) \cap [0, m_\eta - 1]) \\ &\subseteq [0, m_h - 1] \cap (h-1)\,([0, m_{h-1}] \cup (\{m_{h-1}\} + \mathfrak{S}_h)) \\ &\subseteq [0, m_h - 1] \cap (h-1)\,([0, m_{h-1}] + \mathfrak{S}_h).\end{aligned}$$

Da dies nach Konstruktion eine echte Teilmenge von $[0, m_h - 1]$ ist, kann $\mathfrak{W}$ keine Basis irgendeiner Ordnung h sein (auch nicht im Großen, da $0, 1 \in \mathfrak{W}$).

4. Wählen wir in dem vorigen Beispiel die k_h sogar so groß, daß $\lim\limits_{h\to\infty} \psi_h^{(k_h)}(\alpha) = 1$ für alle $\alpha > 0$ ist, so erhalten wir nach dem gleichen Verfahren eine Menge $\mathfrak{W}_1$ mit den Eigenschaften:

$\mathfrak{W}_1$ ist keine Basis (im Großen), und aus $\delta^*(\mathfrak{A}) > 0$ folgt $\delta^*(\mathfrak{A}+\mathfrak{W}) = 1$; d. h. also $\varphi^*(\alpha, \mathfrak{W}_1) = 1$ für $0 < \alpha \leqq 1$.

Zum Beweis können wir $1 \in \mathfrak{A}$ annehmen. Andernfalls schreiben wir $\mathfrak{A}$ in der Form $\mathfrak{A} = \{a_0 - 1\} + \mathfrak{A}'$ mit $1 \in \mathfrak{A}'$ und betrachten $\mathfrak{A}'$ statt $\mathfrak{A}$. Das ist wegen $\delta^*(\mathfrak{A}') = \delta^*(\mathfrak{A})$ und $\delta^*(\mathfrak{A}' + \mathfrak{W}_1) = \delta^*(\mathfrak{A} + \mathfrak{W}_1)$ zulässig. Mit $\delta^*(\mathfrak{A}) > 0$ und $1 \in \mathfrak{A}$ ist aber auch $\delta(\mathfrak{A}) > 0$. Es sei $\delta(\mathfrak{A}) = \alpha$. Analog dem obigen folgt für $m_{h-1} \leqq n < m_h$

$$\begin{aligned}(A+W_1)(n) &\geqq \sum_{\eta=1}^{h-1} (m_\eta - m_{\eta-1})\,\delta(\mathfrak{A}+\mathfrak{S}_\eta) + (n - m_{h-1})\,\delta(\mathfrak{A}+\mathfrak{S}_h) \\ &\geqq \sum_{\eta=1}^{h-1} (m_\eta - m_{\eta-1})\,\psi_\eta^{(k_\eta)}(\alpha) + (n - m_{h-1})\,\psi_h^{(k_h)}(\alpha),\end{aligned}$$

$$\frac{(A+W_1)(n)}{n} \geqq \frac{1}{n}\left(\sum_{\eta=1}^{h-1} (m_\eta - m_{\eta-1})\,\psi_\eta^{(k_\eta)}(\alpha) + (n - m_{h-1})\,\psi_h^{(k_h)}(\alpha)\right).$$

Wegen $\psi_h^{(k_h)}(\alpha) \to 1$ strebt dieses gewogene Mittel der $\psi_h^{(k_h)}(\alpha)$ für unbegrenzt wachsendes n gegen 1.

Literatur:

[1] *P. Erdös*, On the arithmetical density of the sum of two sequences one of which forms a basis for the integers Acta arithm. **1**, 197–200 (1936).

[2] *U. V. Linnik*, On Erdös's theorem on the addition of numerical sequences. Mat. Sbornik, N. S. **10**, 67–78 (1942).

[3] *A. Stöhr*, Gelöste und ungelöste Fragen über Basen der natürlichen Zahlenreihe II. (Siehe insbes. § 11.) Dieses Journal **194**, 111–149 (1955).

Eingegangen 17. April 1955.

Ein Kontaktproblem der konformen Abbildung.[1])

Von *Richard Wagner* in Jena.

Der Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die konforme Abbildung gewisser schlichter Bereiche auf Normalbereiche. Der in diesem Zusammenhange grundlegende Satz von Riemann über die Abbildbarkeit eines jeden einfach zusammenhängenden, schlichten Bereiches mit mehr als einem Randpunkt auf die Fläche des Einheitskreises ist, besonders durch die Untersuchungen von Koebe, nach zwei Richtungen hin verallgemeinert worden. Dabei handelt es sich einmal um den sogenannten *Fundamentalsatz über konforme Abbildungen*, der die Möglichkeit der eineindeutigen und konformen Abbildung jeder beliebigen einfach zusammenhängenden Riemannschen Fläche auf einen schlichten Bereich (Vollebene, endliche Ebene oder Innengebiet des Einheitskreises) sicherstellt und in engster Verbindung mit den allgemeinen Uniformisierungstheoremen steht[2]). Zum anderen ist das Koebesche *Kreisscheibentheorem* zu nennen: Jeder schlichte Bereich von endlicher Zusammenhangsordnung kann eineindeutig und konform auf einen passenden, von lauter vollständigen Kreislinien berandeten, schlichten Bereich abgebildet werden; die Abbildung ist bis auf lineare Transformationen eindeutig bestimmt[3]).

Die durch den zuletzt genannten Satz charakterisierte Entwicklungsrichtung in der Theorie der konformen Abbildung zielt darauf ab, für beliebige, auch unendlich-vielfach zusammenhängende, schlichte Bereiche einen entsprechenden Abbildungssatz zu gewinnen, der den Inhalt des von Koebe als Desideratum formulierten *allgemeinen Kreisnormierungsprinzips* bilden soll. Abschließende Ergebnisse sind jedoch hier noch nicht erreicht worden. Man beherrscht vielmehr vorläufig nur gewisse Klassen von Bereichen unendlicher Zusammenhangsordnung, die etwa durch Symmetrieeigenschaften oder übersichtliche Häufungsphänomene der Randkomponenten charakterisierbar sind.

In einer im Jahre 1936 erschienenen Arbeit[4]) hat Koebe, anknüpfend an sein Kreisscheibentheorem, einen neuartigen Fragenkomplex eröffnet. Die betreffenden Untersuchungen beschäftigen sich mit der Frage der Kreisnormierung solcher schlichten „Bereiche", bei denen die einzelnen Randlinien — in endlicher Anzahl gegebene geschlossene Jordankurven — nicht völlig getrennt voneinander verlaufen, sondern gemeinsame Punkte (*Kontaktpunkte*) besitzen. Dabei wird im allgemeinen ein Zerfall der Vollebene in mehrere Zellen eintreten, die miteinander nicht gebietsmäßig zusammenhängen. Die Gesamtheit der einzelnen Zellen wird als *Kontaktbereich* bezeichnet. Zwei Randlinien sollen, auch wenn sie einen Kontakt eingehen, bei der Abbildung zu je einer vollständigen Kreislinie Anlaß geben. Die beiden Kreislinien werden sich dann ihrerseits berühren.

Es zeigt sich, daß man die Kontaktbereiche nur trivialen, topologischen Bedingungen bezüglich der auftretenden Kontakte unterwerfen muß, um die Existenz einer Kreisnormierungsabbildung im angedeuteten Sinne und die bis auf lineare Transformationen

[1]) Es handelt sich, von kleineren Änderungen abgesehen, um die von der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Jena angenommene Dissertation des Verfassers.

[2]) Lit. [4]. [3]) Lit. [2], S. 282/296. [4]) Lit. [1].

eindeutige Bestimmtheit dieser Abbildung sicherzustellen. Die entscheidende Beweisidee ist eine Approximation des abzubildenden Kontaktbereiches durch gewöhnliche, endlich vielfach zusammenhängende Bereiche, auf die das Kreisscheibentheorem angewendet werden kann. Selbstverständlich muß bei der Formulierung des Abbildungssatzes und bei dessen Beweis berücksichtigt werden, daß den Kontaktbereichen die Eigenschaft des Zusammenhanges fehlen kann.

Übrigens ergibt sich auf diesem Wege die interessante, rein topologische Tatsache, daß unter gewissen auf der Hand liegenden Einschränkungen jedes durch geschlossene Jordankurven realisierbare Kontaktschema in der schlichten Ebene auch durch Kreislinien realisierbar ist.

Herrn Professor Brödel verdanke ich die Anregung zur Beschäftigung mit Kontaktproblemen allgemeinerer Art und vielfältige Förderung bei den im folgenden niedergelegten Untersuchungen.

Es scheint ein organischer Schritt zur Erweiterung der Koebeschen Problemstellung zu sein, die Untersuchungen von der schlichten Ebene auf andere, etwa geschlossene Riemannsche Flächen zu verlegen. Die Forderung nur endlich vieler Randlinien soll unangetastet bleiben. Es ist klar, daß mit der Behandlung eines solchen Kontaktproblems die Erledigung eines entsprechenden Kreisnormierungsproblems für gewöhnliche Bereiche Hand in Hand zu gehen hat.

Um gleich zur vernünftigen Formulierung eines Kreisnormierungsproblems auf einer Riemannschen Fläche zu gelangen, wird man die folgenden Vorstellungen heranziehen [5]). Die schlichte Vollebene, in der sich die genannten Koebeschen Betrachtungen abspielen, ist im Sinne des Fundamentalsatzes über konforme Abbildungen das Konformmodell für alle geschlossenen Riemannschen Flächen vom Geschlecht Null. Ein entsprechendes Konformmodell für eine beliebige andere Riemannsche Fläche erhält man, indem man innerhalb der endlichen Ebene (*parabolischer Fall*) oder innerhalb des Einheitskreises (*hyperbolischer Fall*) eine gewisse eigentlich diskontinuierliche Gruppe von linearen Transformationen einführt — die *Fundamentalgruppe* der betreffenden Fläche — und die bezüglich dieser Gruppe äquivalenten Punkte des Grundbereiches miteinander identifiziert. Die so entstehende *Fundamentalmannigfaltigkeit* wird mit einer *absoluten Metrik* im Koebeschen Sinne ausgestattet und dadurch zur *nichteuklidischen Raumform* erhoben. Die einzuführende absolute Metrik ist durch gewisse einfache geometrische Eigenschaften charakterisiert. Im parabolischen Falle ergibt sich die euklidische, im hyperbolischen Falle die bekannte, für die Fläche des Einheitskreises maßgebende nichteuklidische Metrik. Die Kreise auf der Fundamentalform erscheinen jedenfalls auch als Kreise im euklidischen Sinne und umgekehrt.

Unter Verwendung der zugehörigen Fundamentalform als metrisiertes Modell kann das Kreisnormierungsproblem auf einer beliebigen Riemannschen Fläche nunmehr in der schlichten Ebene formuliert werden. Es handelt sich um die im bisherigen Sinne verstandene Kreisabbildung solcher schlichten Bereiche bzw. Kontaktbereiche, die die Transformationen einer Fundamentalgruppe gestatten. Dem Auftreten nur endlich vieler Randlinien auf der Fläche entspricht die Eigenschaft der genannten schlichten Bereiche, nur endlich viele im Sinne der Äquivalenz bezüglich der Fundamentalgruppe verschiedene Randkontinua aufzuweisen. Die Gesamtanzahl der Randkontinua ist unendlich, wenn man von niederen Fällen absieht. Wesentlich für die Rückübertragung auf die Ausgangsfläche ist eine Aussage darüber, ob der kreisförmig berandete Bildbereich — bei passender Normierung — seinerseits bei den Transformationen der Fundamentalgruppe invariant ist.

---

[5]) Lit. [5], 1. Mitteilung.

Jede Lösung eines solchen Kreisnormierungsproblems bedeutet zugleich auch einen Fortschritt in Richtung auf das allgemeine Kreisnormierungsprinzip, indem gewisse Klassen von schlichten Bereichen unendlicher Zusammenhangsordnung diesem Prinzip unterworfen werden.

Der nächstliegende, über das Bekannte hinausgehende Fall, der im folgenden behandelt werden soll, ist der einer geschlossenen Mannigfaltigkeit vom Geschlecht Eins, mit anderen Worten: der einer elliptischen Riemannschen Fläche. Die Fundamentalgruppe ist dann eine zweischarige Gruppe von Translationen. Jedes ränderbezogene Fundamentalparallelogramm der Gruppe, versehen mit der euklidischen Metrik, ist ein *Elementarmodell* der Fläche, d. h. es gibt unmittelbar Einblick in die vorliegenden Maßverhältnisse. Damit sind, so hoffe ich, die weiteren Ausführungen hinreichend motiviert.

Wir betrachten zunächst gewöhnliche schlichte Bereiche von zweifach periodischer Struktur mit endlich vielen erzeugenden Randkontinua. Für diese Bereiche wird der Kreisnormierungssatz in vollem Umfange bewiesen. Die Beweismethoden und das Ergebnis sind nicht neu, sie ordnen sich einer Abhandlung von Denneberg unter[6]).

Über den Abbildungssatz hinaus ergibt sich in unserem Falle bei passender Normierung die bis auf Ähnlichkeitstransformationen bestimmte zweifach periodische Struktur des Bildbereiches. Die Frage nach der Übereinstimmung der zum Original- bzw. Bildbereich gehörigen Translationsgruppen bleibt an dieser Stelle noch unbeantwortet.

Sodann wird das Problem der Kreisabbildung zweifach periodischer Kontaktbereiche formuliert und in einem besonders illustrativen, einfachen Falle mit speziellen Mitteln gelöst. Die genauere Diskussion dieses Beispiels führt zu der Erkenntnis, daß bei der Kreisabbildung gewöhnlicher, zweifach periodischer Bereiche die zum Original- bzw. Bildbereich gehörigen Translationsgruppen im allgemeinen wesentlich voneinander verschieden sind. Das bedeutet, daß man die Kreisnormierung eines gewöhnlichen Bereiches von endlicher Zusammenhangsordnung, der auf einer elliptischen Riemannschen Fläche mit absoluter Metrik ausgebreitet ist, nur in der Weise vornehmen kann, daß man gleichzeitig die tragende Fläche einer passenden Modifikation unterwirft. Man kann also auf dem Umwege über Kontaktprobleme tieferen Einblick in die bei der Kreisabbildung gewöhnlicher Bereiche vorliegenden Verhältnisse gewinnen.

Schließlich werden Existenz und Unität der Kreisabbildung des allgemeinen zweifach periodischen Kontaktbereiches bewiesen. Dabei braucht der abzubildende Kontaktbereich wiederum nur den trivialen Bedingungen zu genügen, die schon im Falle der Vollebene in Erscheinung treten.

Gesamtanlage und Einzelausführungen sind durchaus in den Ideen von Koebe verankert. Es wird sich zeigen, daß diese Ideen auch in unserem Falle grundsätzlich zugkräftig bleiben. Selbstverständlich werden sie im einzelnen durch zusätzliche Überlegungen ergänzt werden müssen. Die tragende Grundlage des Ganzen wird wesentlich von allgemeinen funktionentheoretischen Prinzipien gebildet (*Häufungsprinzip für analytische Funktionen*, *Spiegelungsprinzip*, *Verzerrungssatz*).

1. Der Kreisnormierungssatz für zweifach periodische Bereiche.

Vorgelegt seien eine zweischarige Translationsgruppe $\mathfrak{T}$ und ein k-fach zusammenhängender, offener, den Unendlichpunkt im Inneren enthaltender Bereich in der z-Ebene, dessen Komplementärmenge keine bezüglich $\mathfrak{T}$ äquivalenten Punktepaare aufweist. Reproduziert man die k beschränkten Randkontinua des Bereiches — man stelle sich etwa geschlossene, außerhalb einander gelegene Jordankurven vor — vermöge der Translationen aus $\mathfrak{T}$, so

[6]) Lit. [6].

häufen sich die entstehenden Kontinua nur gegen den Unendlichpunkt der z-Ebene und bilden zusammen mit diesem Punkte (*Häufungsrandkomponente*) die vollständige Berandung eines unendlich-vielfach zusammenhängenden, *schlichten Bereiches B von zweifach periodischer Struktur.* Diese Bezeichnung sei durchweg den in der beschriebenen Weise erzeugbaren Bereichen vorbehalten.

Wir haben die Absicht, den folgenden Satz zu beweisen:

Satz. *Jeder schlichte, zweifach periodische Bereich B kann umkehrbar eindeutig und im Inneren konform auf einen schlichten Kreisbereich abgebildet werden, d. h. auf einen von lauter Vollkreisen berandeten Teilbereich einer ζ-Ebene. Die Abbildung ist bis auf lineare Transformationen eindeutig bestimmt. Insbesondere besitzt der Bildbereich seinerseits nur eine punktförmige Häufungsrandkomponente und, falls man diese ins Unendliche verlegt, zweifach periodische Struktur.*

Da sich jede Funktion, die eine solche Abbildung leistet, über eventuelle isolierte Randpunkte von B hinweg regulär schließen und somit als Bild eines solchen Punktes wieder ein isolierter Randpunkt (Kreislinie vom Radius Null) erscheinen würde, können und wollen wir im folgenden von dem Auftreten isolierter Randpunkte absehen.

Zur Konstruktion einer Abbildung mit den geforderten Eigenschaften wählen wir einen einfach zusammenhängenden und abgeschlossen vorzustellenden Fundamentalbereich F_{00} für die Gruppe $\mathfrak{T}$, der ein vollständiges Repräsentantensystem $C_{00}^{\varkappa}(\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$ der Randkontinua von B im Inneren enthalten möge. T_{10} und T_{01} seien zwei zu F_{00} gehörige Erzeugende von $\mathfrak{T}$, so daß die durch Anwendung von $T_{\lambda\mu} = T_{10}^{\lambda} T_{01}^{\mu}$ auf F_{00} entstehenden Parzellen $F_{\lambda\mu}$ die endliche z-Ebene vollständig überdecken, wobei verschiedene Parzellen höchstens Randpunkte gemeinsam haben. Die einzelnen Randstücke der Parzellen schließen sich dabei zu einem System von *Gitterlinien* zusammen. $C_{\lambda\mu}^{\varkappa} = T_{\lambda\mu}(C_{00}^{\varkappa})$ sind die sämtlichen Randkontinua von B. Jedes endliche Stück einer Gitterlinie verläuft innerhalb B. Schließlich sei ein Punkt z_0 ausgewählt, der samt einer Umgebung $|z - z_0| \leqq r$ innerhalb F_{00} und B liegt.

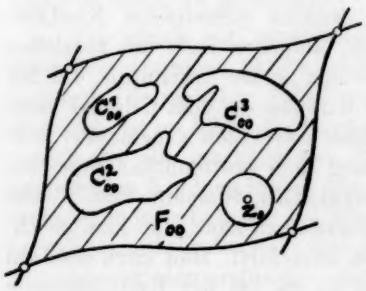


Fig. 1.

Die Funktion $\zeta_n(z)$ möge das von den Kontinua $C_{\lambda\mu}^{\varkappa}$ mit $\varkappa = 1, \ldots, k$; $\lambda, \mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm (n-1)$ berandete, $k(2n-1)^2$-fach zusammenhängende Außengebiet eineindeutig und konform auf ein von lauter Vollkreisen begrenztes Teilgebiet B_n der ζ_n-Ebene abbilden, wobei im Punkte z_0 die Verhaltungsvorschrift

$$\zeta_n(z) = \frac{1}{z - z_0} + o(1)$$

erfüllt sei.

Auf Grund des *Kreisscheibentheorems*[7]) existiert zu jedem n eine Funktion $\zeta_n(z)$ mit den geforderten Eigenschaften; sie ist im übrigen eindeutig bestimmt. Alle $\zeta_n(z)$ sind innerhalb B eindeutig, bis auf den Pol bei z_0 regulär und schlichtabbildend. Ein von Koebe herrührender Hilfssatz[8]) liefert die Abschätzung

$$|\zeta_n(z)| < \frac{5}{\varrho} \quad \text{für} \quad 0 < |z - z_0| = \varrho \leqq r,$$

so daß das Bild der Kreislinie $|z - z_0| = \frac{r}{2}$ ganz innerhalb des Kreises $|\zeta_n| = \frac{10}{r}$ ver-

[7]) Lit. [2], S. 282/296. [8]) Lit. [4], S. 39, Hilfssatz V.

läuft. Wegen des Schlichtheitscharakters sind die ζ_n in dem Bereiche, der aus B durch Ausstanzen der Kreisfläche $|z - z_0| \leqq \frac{r}{2}$ entsteht, gleichmäßig beschränkt. Das gleiche gilt im Bereiche $|z - z_0| \leqq r$ für die dort regulären Funktionen $(z - z_0)\,\zeta_n$ wegen der soeben erkannten Beschränktheit der Randwerte. Gemäß dem *Häufungsprinzip für analytische Funktionen* kann man also eine in jedem abgeschlossenen Teilbereich von B gleichmäßig konvergente Teilfolge von Funktionen $\zeta_n(z)$ auswählen. Der Punkt z_0 beansprucht hierbei keine Sonderbehandlung, da sich die Hauptteile der Funktionen bei Differenzbildung zerstören.

Die Grenzfunktion $\zeta(z)$ der Auswahlfolge ist innerhalb B eindeutig und regulär mit Ausnahme des Punktes z_0, in dem ein Pol erster Ordnung mit dem Entwicklungstypus

$$\zeta(z) = \frac{1}{z - z_0} + o(1)$$

erscheint. Die Grenzfunktion ist also insbesondere nicht konstant und leistet somit, wie alle Näherungsfunktionen, eine Schlichtabbildung von B. Der Bildbereich B in der ζ-Ebene ist ein Kreisbereich. Die ζ_n-Bilder eines beliebig herausgegriffenen $C^{\varkappa}_{\lambda\mu}$ sind nämlich von einem bestimmten Index m an sämtliche Kreislinien, so daß die Funktionen $\zeta_n(\zeta_m)$ $(n > m)$ nach dem *Spiegelungsprinzip* in einem das ζ_m-Bild von $C^{\varkappa}_{\lambda\mu}$ einbettenden Kreisringe regulär sind. Die gemeinsame Schranke für die Größen ζ_n bleibt ersichtlich auch jetzt noch maßgebend. Die gleichmäßige Konvergenz $\zeta_n(\zeta_m) \to \zeta(\zeta_m)$ erstreckt sich somit auch auf die genannte Kreisrandlinie von B_m. Etwa durch Beachtung der Realität des Doppelverhältnisses von vier beliebigen ζ_n-Bildpunkten erkennt man daraus unmittelbar die Kreisnatur des ζ-Bildes von $C^{\varkappa}_{\lambda\mu}$.

Es ist nun zu untersuchen, in welcher Weise sich die Randkreise von B häufen. Zu diesem Zwecke setze man im Originalbereich an jedes der vier Randstücke von F_{00} in den anstoßenden Parzellen $F_{\pm 1,0}$ bzw. $F_{0,\pm 1}$ je einen schmalen, einfach zusammenhängenden Flächenstreifen an, der ganz innerhalb B liegt. Durch kongruente Verlagerung vermöge der Translationen aus $\mathfrak{T}$ kann man aus diesen Streifen andere zusammensetzen, die sich an die Außenkontur L^n der Vereinigung der Parzellen $F_{\lambda\mu}$ mit $\lambda, \mu = 0, \pm 1, \ldots, \pm(n-1)$ anlegen. Die einzelnen, von Gitterpunkt zu Gitterpunkt verlaufenden Teile der Außenkontur werden in naheliegender Weise mit $L^n_{\lambda\mu}$ bezeichnet. Man denke sich dies für jeden Wert von n ausgeführt und bemerke, daß die L^n einfach geschlossene Linien sind, die sämtlich die Kreisscheibe $|z - z_0| \leqq r$ umschließen. Bei der Abbildung durch $\zeta(z)$ entstehen lauter Bildstreifenstücke, die höchstens Randpunkte gemeinsam haben und sämtlich innerhalb des Kreises $|\zeta| < \frac{5}{r}$ liegen, so daß die Flächensumme der Bildstreifenstücke konvergieren muß. Nun lehrt der *Verzerrungssatz*, daß für jedes Bildstreifenstück das Verhältnis des Flächeninhaltes zum Quadrat der Länge der zugehörigen *Trägerlinie* $\Lambda^{\lambda}_{n\mu}$ oberhalb einer positiven, nur von der Streifenkonfiguration in B abhängigen Schranke bleibt. Die Existenz der dazu erforderlichen einheitlichen Verzerrungsschranke für alle Streifenstücke in B ergibt sich aus der Tatsache, daß für kongruente (übrigens auch für einander ähnliche) Paare „Bereichab—geschlossener Teilbereich" dieselbe Verzerrungs-

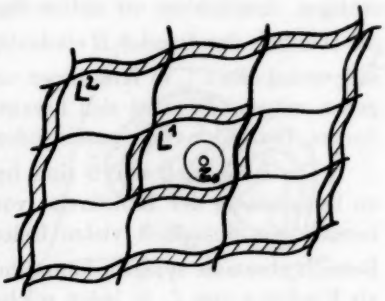


Fig. 2.

schranke maßgebend ist, so daß hier nur vier wesentlich verschiedene Streifenstücke in B zu berücksichtigen sind. Demnach konvergiert nun auch die Summe

$$\sum_n \sum_{\lambda,\mu} |\Lambda^n_{\lambda\mu}|^2.$$

Für die mit festem n gebildete, $4(2n-1)$-gliedrige innere Summe gilt die elementare Ungleichheitsbeziehung

$$\sum_{\lambda,\mu} |\Lambda^n_{\lambda\mu}|^2 \geqq \frac{1}{4(2n-1)} \left[\sum_{\lambda,\mu} |\Lambda^n_{\lambda\mu}|\right]^2 = \frac{|\Lambda^n|^2}{4(2n-1)},$$

so daß auch

$$\sum_n \frac{|\Lambda^n|^2}{4(2n-1)}$$

konvergiert[9]). Es folgt, daß unter den Bildlinien Λ^n der Außenkonturen L^n solche von beliebig kleiner Länge auftreten müssen. Da außerhalb von Λ^n nur endlich viele Randkreise von B liegen, die Häufungsrandkomponente von B also durch jedes Λ^n umschlossen wird, können sich die Randkomponenten von B nur gegen einen Punkt ζ^* häufen.

Dieses Ergebnis bleibt für den Bildbereich jeder Funktion gültig, die B eindeutig, konform und schlicht abbildet; denn die Kreisnatur der Randlinien von B hat bei der vorstehenden Überlegung keine Rolle gespielt, und die Voraussetzung bezüglich der Entwicklung der Abbildungsfunktion bei z_0 kann durch Anwendung einer linearen Transformation immer befriedigt werden.

Man könnte beim Anblick des hiermit abgeschlossenen Existenzbeweises den Wunsch verspüren, die vorgenommene Normierung der Abbildungsfunktionen durch eine andere ersetzt zu sehen, die der natürlichen Sonderstellung des Unendlichpunktes in B besser Rechnung trägt. Dazu ist zu bemerken, daß man durch die von uns gewählte Normierung bei allen Konvergenzfragen erheblichen Schwierigkeiten entgeht, die etwa bei einer Normierung „Unendlich geht nach Unendlich" unvermeidbar sind. Diese Bemerkung betrifft sinngemäß auch alle folgenden Betrachtungen allgemeiner Art.

Mit dem Ziele, die in unserem Abbildungssatze enthaltene Unitätsaussage zu bestätigen, betrachten wir neben der eben konstruierten Funktion $\zeta(z)$ eine zweite, $\tilde{\zeta}(z)$, die ebenfalls den Bereich B eindeutig und konform auf einen schlichten Bereich $\tilde{\mathsf{B}}$ abbilden soll, wobei alle $C^n_{\lambda\mu}$ in Kreislinien und z_0 in den unendlich fernen Punkt der $\tilde{\zeta}$-Ebene übergehen mögen. Es wird sich herausstellen, daß die beiden Funktionen durch eine ganze lineare Transformation auseinander hervorgehen.

Die Bereiche B und $\tilde{\mathsf{B}}$ sind beide unbeschränkt spiegelungsfähig. Durch Spiegelung an irgendeinem der Randkreise von B gewinnt man einen an B anschließenden Spiegelbereich mit unendlich vielen freien Kreisrändern, an denen man den neugewonnenen Bereich abermals spiegeln kann und so fort. Das gleiche gilt für $\tilde{\mathsf{B}}$. Nun ist $\tilde{\zeta}$, betrachtet als Funktion von ζ, in jeden solchen durch Spiegelungen erzeugten Erweiterungsbereich von B hinein eindeutig und regulär fortsetzbar und leistet eine schlichte und konforme Abbildung dieses Bereiches auf den durch die entsprechenden Spiegelungen entstehenden Erweiterungsbereich von $\tilde{\mathsf{B}}$, wobei die beiden unendlich fernen Punkte einander entsprechen. Man denke sich den Spiegelungs- und Fortsetzungsprozeß unbeschränkt fortgeführt. Hierbei kommt eine Ausfüllung der ζ-Ebene bis auf eine gewisse perfekte Menge von Grenzpunkten zustande.

Wir folgen nun einem Gedankengang von Koebe[10]), der als Verallgemeinerung des bekannten Riemannschen Satzes von der hebbaren Unstetigkeit angesehen werden kann.

[9]) Lit. [6], S. 341/42. [10]) Lit. [3], S. 29ff.

Es wird sich zeigen, daß die genannte Grenzpunktmenge so „dünn" ist — sie hat den Jordaninhalt Null — und die Abbildungsfunktion sich bei Annäherung an diese Menge in so hohem Maße bestimmt verhält, daß ein Singulärwerden unmöglich ist. Vielmehr schließt sich die Funktion regulär über alle Grenzpunkte hinweg und ist also eine ganze lineare Funktion.

Die folgenden Einzelausführungen sind bewußt so gehalten, daß sie möglichst weitgehend auch bei den später zu behandelnden Kontaktproblemen anwendbar bleiben.

Wir müssen uns davon überzeugen, daß man von B durch Anfügung endlich vieler Spiegelexemplare zu einem Erweiterungsbereich B_N übergehen kann, dessen freie Randkreise insgesamt nur einen beliebig kleinen Flächeninhalt haben; auch die Randkreisflächensumme des Bildbereiches $\tilde{B}_N$ soll beliebig klein werden.

Die Randkreisflächensumme von B konvergiert wegen der getrennten Lage der Kreise innerhalb eines festen, großen Kreises. Sie verkleinert sich bei jeder Erweiterung. Wir betrachten irgendeines der auftretenden Spiegelexemplare von B. Sein Flächeninhalt bleibt, so wird sich ergeben, oberhalb eines gewissen, durch eine nur von B abhängige *Konfigurationskonstante* q $(0 < q < 1)$ beschreibbaren Bruchteils der Fläche des zugehörigen Außenkreisrandes. Man kann also, indem man von B ausgeht und bei jedem Schritt in die unendlich vielen, jeweils freien Randkreise ein Spiegelexemplar einlagert, Erweiterungsbereiche finden, deren Randkreisflächensummen durch $(1-q)f_0$, $(1-q)^2 f_0, \ldots$ majoriert werden (f_0: Randkreisflächensumme von B). Die Summen lassen sich aber, und das ist hier sehr wichtig, auch schon durch Anlagern endlich vieler Spiegelexemplare an B beliebig herabdrücken. Die unmittelbar vorangegangene Feststellung hat nämlich die Konvergenz der Flächensumme aller überhaupt auftretenden Randkreise zur Folge.

Da schließlich die Bereiche B und $\tilde{B}$ vollständig gleichberechtigt erscheinen, ist die Konstruktion des verlangten Erweiterungsbereiches auf die Gewinnung der Konstanten q zurückgeführt.

Wir verschaffen uns eine solche Größe $\delta > 1$, daß alle Randkreise von B im Verhältnis δ konzentrisch erweitert werden können, ohne daß sich die entstehenden Kreisringflächen irgendwie treffen. Zu dem Zwecke umgeben wir in der z-Ebene jedes der Kontinua $C_{00}^{\varkappa}$ mit einem abgeschlossenen, zweifach zusammenhängenden, von zwei geschlossenen, analytischen Kurven berandeten Flächenstreifen, der ganz innerhalb F_{00} und B verläuft und das umschlossene Kontinuum von den $k-1$ übrigen isoliert. Überdies sollen die k Streifen paarweise punktfremd sein, und keiner von ihnen möge den Punkt z_0 enthalten oder umschließen. Die Möglichkeit, solche ringförmigen Streifen zu konstruieren, ergibt sich etwa, wenn man die durch $\zeta_1(z)$ geleistete Abbildung heranzieht, bei der die betrachteten Kontinua in Kreislinien übergehen. Die beschriebenen Ringe werden vermöge $\mathfrak{T}$ auf alle Parzellen $F_{\lambda\mu}$ übertragen. Es ist wieder klar, daß eine für sämtliche Ringe maßgebende Verzerrungsschranke bestimmbar ist. Man betrachte nun das durch $\zeta(z)$ entworfene Bild eines beliebigen $C_{\lambda\mu}^{\varkappa}$ mitsamt dem zugehörigen Bildring, der den Kreis wegen der bezüglich z_0 gemachten Voraussetzung umschließt. Der Abstand der beiden Ränder eines zweifach zusammenhängenden Ringgebietes kann immer durch eine im Ringe von Rand zu Rand verlaufende, geradlinige Strecke realisiert werden. Das Verhältnis des Randabstandes zur Länge der inneren Randlinie im Bildring ist demnach größer als das entsprechende Ver-

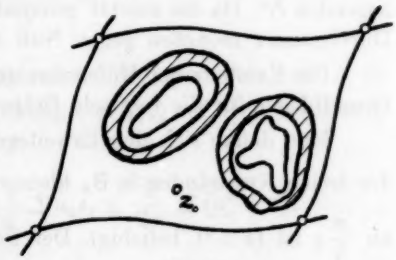


Fig. 3.

hältnis im Originalring, multipliziert mit der erwähnten universellen Verzerrungsschranke $\frac{1}{Q} < 1$; es liegt also jedenfalls oberhalb einer nur von der Ringkonfiguration B in abhängigen Zahl $\alpha > 0$. Dasselbe gilt erst recht von dem entsprechend gebildeten Verhältnis für den erweiterten Bildring, dessen Innenrand der betrachtete Kreis selbst ist. Es ist somit klar, daß $\delta = 1 + \alpha \cdot 2\pi$ eine Größe mit den behaupteten Eigenschaften ist.

Indem man bei dem Spiegelungsprozeß die konstruierten Kreisringe jeweils mitführt, erscheint in jedem Spiegelexemplar von B insbesondere ein innen an den Außenkreis anschließender Kreisring, der ganz dem betrachteten Bereiche angehört. Die Kreisringe sind zwar im allgemeinen nicht mehr konzentrisch, besitzen aber alle dieselbe *konforme Invariante* δ (Radienverhältnis der konform äquivalenten, konzentrischen Kreisringfläche). Das Verhältnis einer Kreisringfläche zur Fläche ihres Außenkreises ist bei fester Invarianten δ dann am kleinsten, wenn der Kreisring ein konzentrischer ist, also nicht kleiner als

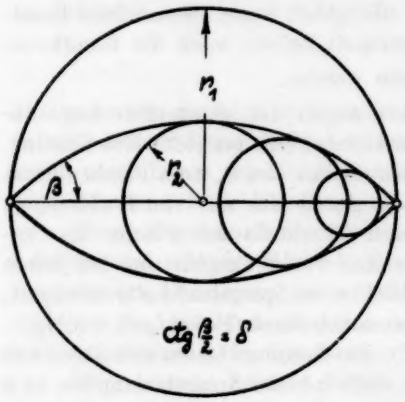


Fig. 4.

$$\frac{r_1^2 - r_2^2}{r_1^2} = 1 - \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = 1 - \frac{1}{\delta^2} = q.$$

Zur Verdeutlichung diene Fig. 4, in der die Lage solcher Kreise angedeutet ist, die bezüglich des festgehaltenen Außenkreises eine feste Invariante δ besitzen. Die Konfigurationskonstante ist damit in unserer Hand.

Als nächstes müssen wir uns in B verlaufende, einfach geschlossene Linien verschaffen, welche die Häufungsrandkomponente von B umschließen, beliebig kleine Länge haben und in $\tilde{\mathsf{B}}$ Bildlinien beliebig kleinen Durchmessers liefern. Die durch $\zeta(z)$ entworfenen Bildlinien Λ^n der vorn konstruierten, in B gelegenen Linien L^n haben diese Eigenschaften. Es gibt unter ihnen beliebig kurze Linien, ebenso natürlich unter den in $\tilde{\mathsf{B}}$ liegenden $\tilde{\Lambda}^n$. Da die zuletzt genannten Linien ineinandergeschachtelt liegen, nehmen ihre Durchmesser monoton gegen Null ab.

Die Existenz der Hilfslinien und die der Erweiterungsbereiche B_N bilden die beiden Grundpfeiler für die folgende Betrachtung.

Man denke sich den Erweiterungsbereich B_N so bestimmt, daß die Flächensumme der freien Kreisränder in B_N kleiner als $\frac{\varepsilon}{4\pi}$, die zu $\tilde{\mathsf{B}}_N$ gehörige Flächensumme kleiner als $\frac{\pi}{4}\varepsilon$ ist ($\varepsilon > 0$, beliebig). Der Bereich B_N besitzt $N+1$ Häufungspunkte von freien Randkreisen. Ferner wähle man eine Linie Λ^n so aus, daß

$$|\Lambda^n|^2 < \frac{\varepsilon}{N+1}$$

gilt; auch das Quadrat des Durchmessers von $\tilde{\Lambda}^n$ soll unterhalb $\frac{\varepsilon}{N+1}$ liegen. Die Häufungsrandkomponenten von B_N werden von der Linie Λ^n und ihren Spiegelbildern umschlossen. Wir können annehmen, daß sich keine zwei dieser Hilfslinien umschließen. In dem gemeinsamen Außengebiet der $N+1$ Linien liegen nur endlich viele freie Randkreise von B_N. Entsprechendes gilt in der $\tilde{\zeta}$-Ebene von $\tilde{\Lambda}^n$ und den zugehörigen Spiegelbildern. Es

sei angemerkt, daß die Spiegelbilder der Linien $\tilde{\Lambda}^n$ bzw. Λ^n kleinere Länge bzw. kleineren Durchmesser haben als diese Linien selbst.

Der außerhalb aller $N+1$ von Λ^n herrührenden Linien gelegene Teilbereich von B_N sei mit $\mathring{\mathsf{B}}$ bezeichnet, der außerhalb aller von $\tilde{\Lambda}^n$ herrührenden Linien gelegene Teilbereich von $\tilde{\mathsf{B}}_N$ mit $\mathring{\tilde{\mathsf{B}}}$. Diese Bereiche $\mathring{\mathsf{B}}$ und $\mathring{\tilde{\mathsf{B}}}$ sind Bereiche endlicher Zusammenhangsordnung, die durch $\tilde{\zeta}(\zeta)$ aufeinander bezogen sind. Gemäß der Konstruktion von $\mathring{\mathsf{B}}$ ist die Quadratsumme der Längen sowohl der kreisförmigen als auch der von Λ^n herrührenden Randlinien je kleiner als ε. In $\mathring{\tilde{\mathsf{B}}}$ gilt das gleiche für die Quadratsumme der Durchmesser der kreisförmigen bzw. der von $\tilde{\Lambda}^n$ herrührenden Randlinien.

Die den Bereich $\mathring{\mathsf{B}}$ betreffende Feststellung hat insbesondere zur Folge, daß der Jordaninhalt der bei unbeschränkter Fortführung des Spiegelungsprozesses entstehenden Grenzpunktmenge verschwindet, da diese Punktmenge durch endlich viele Flächenstücke beliebig kleinen Gesamtflächeninhaltes — die Komplementärmenge von $\mathring{\mathsf{B}}$ — überdeckt werden kann.

Man wähle nun innerhalb B eine kleine, abgeschlossene Kreisscheibe U. Es darf angenommen werden, daß U innerhalb $\mathring{\mathsf{B}}$ liegt und vom Rand R dieses Bereiches einen Abstand oberhalb einer festen Größe $d > 0$ besitzt. Für die Funktion $\tilde{\zeta}(\zeta)$ kann man in U die folgende Cauchysche Integraldarstellung angeben:

$$2\pi i\,\tilde{\zeta}(\zeta) = \oint_{K_0} \frac{\tilde{\zeta}(t)}{t-\zeta}\,dt - \oint_{R} \frac{\tilde{\zeta}(t)}{t-\zeta}\,dt;$$

K_0 sei dabei ein großer Kreis, der U umschließt und dessen Außengebiet ganz zu B und $\mathring{\mathsf{B}}$ gehört, so daß $\tilde{\zeta}(\zeta)$ auf und außerhalb K_0 bis auf die einfache Polstelle im Unendlichen regulär ist. Da keine der geschlossenen Randlinien, aus denen sich R zusammensetzt, die Kreisscheibe U umschließt, kann man auf jeder dieser Linien einen festen Punkt t_ϱ wählen und die Relation

$$\oint_{R} \frac{\tilde{\zeta}(t)}{t-\zeta}\,dt = \sum_{\varrho} \oint \frac{\tilde{\zeta}(t)-\tilde{\zeta}(t_\varrho)}{t-\zeta}\,dt$$

anschreiben; die Summe ist über die einzelnen geschlossenen Komponenten von R zu erstrecken. Bezeichnet man mit s_ϱ bzw. u_ϱ die Schwankung von $\tilde{\zeta}(\zeta)$ auf der ϱ-ten Randlinie bzw. deren Länge, so kann man die Abschätzung

$$\left|\oint_{R} \frac{\tilde{\zeta}(t)}{t-\zeta}\,dt\right| \leqq \sum_{\varrho} \left|\oint \frac{\tilde{\zeta}(t)-\tilde{\zeta}(t_\varrho)}{t-\zeta}\,dt\right| \leqq \frac{1}{d}\sum_{\varrho} u_\varrho s_\varrho \leqq \frac{1}{2d}\sum_{\varrho}(u_\varrho^2+s_\varrho^2)$$

vornehmen. Die Summe $\sum\limits_{\varrho} u_\varrho^2$ ist, wie vorweg bemerkt worden ist, kleiner als 2ε, ebenso die Summe $\sum\limits_{\varrho} s_\varrho^2$, da s_ϱ nichts anderes ist als der Durchmesser des Bildes der ϱ-ten Randlinie.

Das Integral

$$\oint_{R} \frac{\tilde{\zeta}(t)}{t-\zeta}\,dt$$

ist nun einerseits vom Stadium des Spiegelungsprozesses und von der Auswahl der Hilfslinien unabhängig, wie die Darstellung von $\tilde{\zeta}(\zeta)$ zeigt; andererseits hat es sich als betrags-

mäßig beliebig klein erwiesen. Es muß also verschwinden, und $\tilde{\zeta}(\zeta)$ wird in U schon durch das Integral

$$\tilde{\zeta}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_0} \frac{\tilde{\zeta}(t)}{t-\zeta}\, dt$$

allein dargestellt. Die Darstellung gilt selbstverständlich auch im ganzen übrigen Innengebiet von K_0 und setzt die Regularität von $\tilde{\zeta}(\zeta)$ in diesem Gebiete in Evidenz. Unsere Funktion ist also überhaupt bis auf einen einfachen Pol im Unendlichen regulär und folglich eine ganze lineare Funktion.

Fordert man von $\tilde{\zeta}(z)$ über das Unendlichwerden bei z_0 hinaus das Verhalten

$$\tilde{\zeta}(z) = \frac{1}{z-z_0} + o(1)$$

an dieser Stelle, so unterscheiden sich die beiden Funktionen ζ und $\tilde{\zeta}$ dort nur durch eine Verschwindungsgröße und müssen folglich übereinstimmen. Unsere Normierungsvorschrift legt also zusammen mit den übrigen Abbildungseigenschaften die Abbildungsfunktion $\zeta(z)$ vollständig fest. Läßt man dagegen die Einschränkung $\tilde{\zeta}(z_0) = \infty$ fallen, so ergibt sich $\tilde{\zeta}(\zeta)$ als allgemeine linear gebrochene Funktion.

Die vorstehenden Untersuchungen zum Kreisnormierungssatze für schlichte, zweifach periodische Bereiche sind dem Sinne nach schon in den Ausführungen von Denneberg[11]) enthalten.

Die wichtigste Folgerung aus dem Unitätssatze finden wir bei der Überpflanzung der Gruppe $\mathfrak{T}$ der Selbstabbildungen von B auf den Bildbereich B. Wir werfen zunächst mittels einer linearen Transformation den Häufungspunkt ζ^* der Randkreise von B nach Unendlich. Die Bezeichnungen $\zeta(z)$ und B für Abbildungsfunktion und Bildbereich wollen wir beibehalten.

Als Selbstabbildungen des Bildbereiches müssen die einzelnen Transformationen der überpflanzten Gruppe T linear sein und den unendlich fernen Punkt als einzige Häufungsrandkomponente in sich überführen. Ferner besitzt T im Bilde der Parzelle F_{00} einen Fundamentalbereich. Falls schließlich in T eine von der Identität verschiedene Transformation mit endlichem Fixpunkt vorkäme, müßte dieser innerhalb B liegen, oder die betreffende Transformation müßte denjenigen Randkreis, der den Fixpunkt enthält oder umschließt, in sich überführen; beides würde dem Schlichtheitscharakter der durch $\zeta(z)$ geleisteten Abbildung widersprechen. T ist also eine mit $\mathfrak{T}$ isomorphe, in der endlichen Ebene eigentlich diskontinuierliche Gruppe von Translationen, d. h. selbst wieder eine zweischarige Translationsgruppe. Der Bildbereich B hat somit, wie B selbst, eine zweifach periodische Struktur.

Man fühlt sich an dieser Stelle zu der Frage veranlaßt, ob die Gruppe T nicht etwa mit $\mathfrak{T}$ übereinstimmt, genauer gesagt: ob man durch passende Normierung die Übereinstimmung der Gruppen erzwingen kann. Wir werden später an Hand von Beispielen sehen, daß ein solcher Sachverhalt im allgemeinen nicht vorliegt.

Beiläufig sei noch bemerkt, daß der Unitätssatz die uneingeschränkte, d. h. nicht nur auswahlmäßige Konvergenz der Folge der Näherungsfunktionen $\zeta_n(z)$ garantiert. Eine bekannte Schlußweise führt von der eindeutigen Bestimmtheit der Grenzfunktion zu diesem Resultat.

---

[11]) Lit. [6].

2. Das Problem der Kreisabbildung zweifach periodischer Kontaktbereiche.

Wie bei der Betrachtung gewöhnlicher, zweifach periodischer Bereiche gehen wir wieder von einer in der z-Ebene interpretierten, zweischarigen Translationsgruppe $\mathfrak{T} = \{T_{\lambda\mu}\}$ aus. An die Stelle der bisher verwendeten Kontinua mögen jetzt k geschlossene Jordankurven treten, deren (offene) Innengebiete sich weder überdecken, noch zusammen ein Paar bezüglich $\mathfrak{T}$ äquivalenter Punkte enthalten. Es ist damit zugelassen, daß die Kurven gemeinsame Punkte (*Kontaktpunkte*) besitzen; ferner dürfen die Kurven äquivalente Punktepaare enthalten, wodurch dann weitere Kontakte entstehen, wenn die Kurven mittels der Translationen aus $\mathfrak{T}$ reproduziert werden. Es ist unsere Absicht, den Durchschnitt B der Außengebiete sämtlicher bei dem Reproduktionsprozeß erscheinenden Kurven so abzubilden, daß alle diese Linien in Kreislinien übergehen, die sich ihrerseits berühren werden, wenn das die Originalkurven tun. Die Abbildung soll in jedem inneren Punkte von B konform, in den Randpunkten jedenfalls noch stetig sein. Schließlich soll sie die Kontaktpunkte der Randlinien in die Kontaktpunkte der entsprechenden Bildkreise überführen (Eigenschaft der *Kontakttreue*).

Da also insbesondere ein gegebenes Kontaktschema durch Kreislinien realisiert werden soll, sind die beiden folgenden Einschränkungen als naturgemäß anzusehen.

Erste Kontaktbedingung: Je zwei Randlinien haben höchstens einen Kontakt miteinander.

Zweite Kontaktbedingung: In einer Kontaktstelle treffen sich nur zwei Randlinien.

Unter diesen zusätzlichen Voraussetzungen zerfällt im allgemeinen das gemeinsame Außengebiet B in offene, zusammenhängende Zellen, an deren Berandung mindestens drei verschiedene Jordankurven teilnehmen (erste Kontaktbedingung) und die miteinander nur durch Vermittlung gewisser Kontaktpunkte in Verbindung stehen. An jeder Kontaktstelle stoßen genau zwei Gebietszipfel aneinander, die von demselben Paare von Jordankurven begrenzt werden (zweite Kontaktbedingung). Es kann vorkommen, daß nur eine einzige, zweifach periodische Zelle auftritt, oder auch unendlich viele einfach periodische; in allen anderen Fällen entstehen unendlich viele endliche Zellen mit endlicher Zusammenhangsordnung. Wir werden alle diese Fälle gemeinsam behandeln können.

Beseitigt man die Kontakte, indem man in unmittelbarer Nähe eines jeden Kontaktpunktes die beiden zusammentreffenden Jordankurven so abändert, daß eine flächenhafte Verbindung zwischen den Zellen zustande kommt, so entsteht ein gewöhnlicher, offener, unendlich-vielfach zusammenhängender Bereich. Diese auch weiterhin im Vordergrunde unserer Betrachtungen stehende Möglichkeit veranlaßt uns dazu, die Punktmenge B als einen *Kontaktbereich* zu bezeichnen, und zwar als einen *zweifach periodischen*.

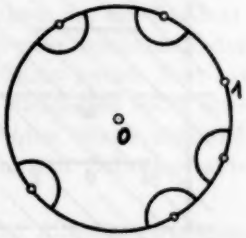


Fig. 5.

Um die Vorstellung zu fixieren, wollen wir uns die an sich in hohem Maße willkürliche, lokale Abänderung der Jordankurven an den Kontaktstellen in folgender Weise vorgenommen denken. Man bilde die von den k Ausgangskurven berandeten Innengebiete mit beliebiger Normierung je auf die Fläche eines Einheitskreises eineindeutig und konform ab. Die Abbildungen sind bekanntlich bis in den Rand hinein stetig. Nun markiere man auf der Peripherie jedes der Kreise die Bilder der sämtlichen auf der betreffenden Jordankurve liegenden Kontaktpunkte und beschreibe um jeden dieser Punkte einen Kreisbogen mit einem gemeinsamen Radius ϱ, der so klein gewählt werde, daß die verschiedenen Kreisbögen nicht miteinander kollidieren. Ersetzt man die Jordankurvenbögen, welche den Peripheriestücken mit Markenpunkten entsprechen, durch die Originale der soeben

konstruierten Kreisbögen mit denselben Endpunkten, so sind nunmehr die modifizierten Jordankurven und auch ihre vermöge der Translationen aus $\mathfrak{T}$ gebildeten Reproduktionen paarweise punktfremd. Wegen der Stetigkeit der Hilfsabbildungen werden bei hinreichend kleinem ϱ die Jordankurven nur in unmittelbarer Nachbarschaft der Kontaktstellen abgeändert. Der durch die modifizierten Kurven berandete, gewöhnliche, zweifach periodische Bereich möge gemäß seiner Konstruktion mit B_ϱ bezeichnet werden. Offenbar gilt

$$B_{\varrho_1} \supset B_{\varrho_2} \text{ für } \varrho_1 > \varrho_2 \text{ und } \lim_{\varrho \to 0} B_\varrho = B.$$

Die zu bewältigende Aufgabe kann nun wie folgt präzisiert werden:

Abbildungsaufgabe. *Ein vorgelegter schlichter, zweifach periodischer Kontaktbereich B, der den beiden Kontaktbedingungen genügt, soll derartig in eine schlichte Ebene abgebildet werden, daß die den Kontaktbereich begrenzenden Jordankurven je in eine vollständige Kreislinie übergehen; die Abbildung soll innerhalb der einzelnen Zellen von B eineindeutig und konform sein; schließlich soll sie die Eigenschaft der Kontakttreue besitzen.*

Es wird sich zeigen, daß diese Aufgabe stets eine und bis auf lineare Transformationen auch nur eine Lösung besitzt. Bevor wir jedoch an den Beweis des damit formulierten *allgemeinen Abbildungssatzes* herangehen, wollen wir ein in verschiedener Hinsicht bemerkenswertes Beispiel behandeln.

3. Beispielhafte Behandlung eines Kontaktschlitzbereiches.

Wir wählen eine Gruppe $\mathfrak{T}$ vom Rechtecktyp, die im folgenden stets festgehalten wird. Sie bestehe aus den Translationen

$$T_{\lambda\mu}(z) = z + \lambda 2\omega + \mu 2\omega'; \quad \omega, \frac{\omega'}{i} > 0; \quad \lambda, \mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Die Berandung eines zweifach periodischen Bereiches werde von den zur Achse des Reellen parallelen Schlitzen gebildet, die aus $-l \leqq z \leqq +l$ $(0 < l < \omega)$ durch Anwendung der $T_{\lambda\mu}$ hervorgehen. Wir wollen den zur Schlitzlänge $2l$ gehörigen Bereich mit B_l bezeichnen.

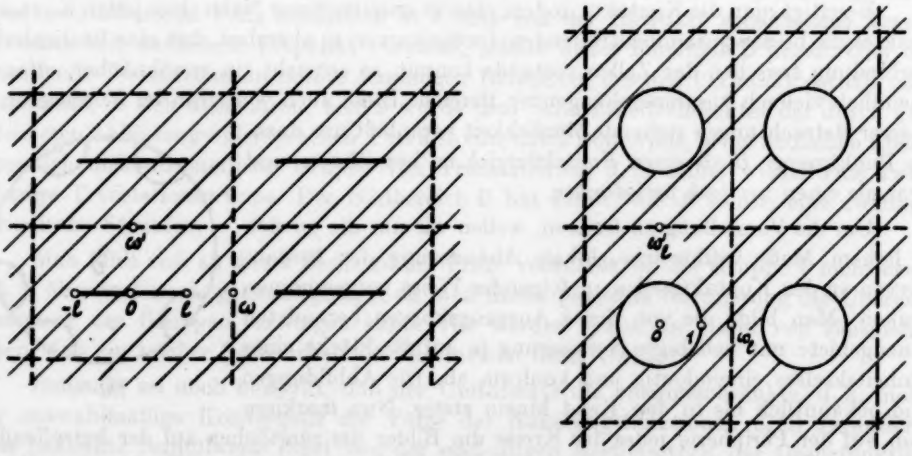


Fig. 6.

Jeder Bereich B_l kann vermöge einer innerhalb B_l eindeutigen und regulären Funktion $\zeta_l(z)$ auf einen Kreisbereich B_l von zweifach periodischer Struktur abgebildet

werden, wobei die Unendlichpunkte in der z- bzw. in der ζ_l-Ebene einander zugeordnet sind. Die Abbildung wird eindeutig fixiert durch die *Normierungsvorschriften*

$$|\zeta_l(z)| = 1 \text{ für } -l \leqq z \leqq +l; \quad \zeta_l(\omega) = \omega_l \text{ reell positiv.}$$

Überpflanzt man die Spiegelung an einer der *Halbgittergeraden*

$$z = \lambda\omega + it, \quad z = t + \mu\omega' \qquad (t \text{ reell})$$

von B_l auf die ζ_l-Ebene und kombiniert sie dann etwa mit der Spiegelung an der Achse des Reellen, so entsteht eine den Unendlichpunkt fest lassende, eineindeutige und konforme Abbildung von B_l auf einen zweiten Kreisbereich. Eine solche wird nach dem Unitätssatze durch eine ganze lineare Funktion bewirkt. Wegen des Auftretens unendlich vieler Fixpunkte entsprechen demnach den Spiegelungen an den Halbgittergeraden in der z-Ebene Geradenspiegelungen in der ζ_l-Ebene. Unter Berücksichtigung von $\zeta_l(\omega) > 0$ folgt, daß die Halbgittergeraden der z-Ebene in die gleichbezifferten Geraden

$$\zeta_l = \lambda\zeta_l(\omega) + it, \quad \zeta_l = t + \mu\zeta_l(\omega') \qquad (t \text{ reell})$$

übergehen — natürlich nur, soweit sie in B_l bzw. in B_l verlaufen. Die Größe

$$\frac{1}{i}\,\omega_l' = \frac{1}{i}\,\zeta_l(\omega')$$

erweist sich dabei als reell positiv. Die bei der Überpflanzung der Gruppe $\mathfrak{T}$ auf die ζ_l-Ebene entstehende Gruppe T_l ist also wiederum vom Rechtecktyp. Wir notieren die entsprechenden *Homomorphismen* der Abbildungsfunktion

$$\zeta_l(z + 2\omega) = \zeta_l(z) + 2\omega_l, \quad \zeta_l(z + 2\omega') = \zeta_l(z) + 2\omega_l'$$

und merken an, daß die bei Eintragung der Gittergeraden (λ, μ ungerade) in die z- bzw. ζ_l-Ebene entstehenden zweifach zusammenhängenden Parzellen bei der Abbildung einzeln ineinander übergeführt werden. Von diesen Tatsachen werden wir öfters Gebrauch machen.

Wir wollen uns nun vorstellen, daß — bei festgehaltener Gruppe $\mathfrak{T}$ — die halbe Schlitzlänge l gegen ω konvergiert. Die Frage ist, ob eine Grenzabbildung zustande kommt und wie diese gegebenenfalls beschaffen ist. Bei dem Grenzübergang $l \to \omega$ geraten in Richtung der Achse des Reellen benachbarte Schlitze in der z-Ebene miteinander in Kontakt, so daß das für unsere Betrachtungen charakteristische Phänomen eines Zerfalls des ursprünglich zusammenhängenden, veränderlich gedachten Bereiches B_l in lauter kongruente Parallelstreifen eintritt. Die aus den einzelnen Streifen bestehende Punktmenge mit den auf den Rändern zu markierenden Kontaktpunkten ist ein Kontaktbereich in unserem Sinne, den wir mit B_ω bezeichnen wollen. Es ist ganz unerheblich, daß wir hier an Stelle geschlossener Jordankurven Schlitze als Randlinien haben. Man hat in solchen Fällen lediglich darauf zu achten, daß die einzelnen Randlinien nicht etwa Selbstkontakte eingehen, was eine Kreisabbildung im angestrebten Sinne natürlich unmöglich machen würde. Bei Verwendung von Jordankurven sind Selbstkontakte automatisch ausgeschlossen.

Wenn wir von einer zu unserem Kontaktbereiche gehörigen Abbildungsfunktion sprechen werden, so ist dazu zu bemerken, daß die innerhalb der einzelnen Streifen regulär erklärten Teile dieser Funktion nicht durch analytische Fortsetzung auseinander hervorgehen werden.

Zur Durchführung des Grenzüberganges betrachten wir die Abbildungsfunktionen $\zeta_l(z)$ mit $0 < l_0 \leqq l < \omega$ in dem von den Geraden

$$z = t \text{ und } z = t + 2\omega' \qquad (-\infty < t < +\infty)$$

begrenzten Parallelstreifen s_0. Als erstes müssen wir die für Gruppe T_l maßgebenden Größen ω_l und ω_l' abschätzen und zeichnen zu diesem Zwecke das von den Punkten

$$-\frac{l_0}{2}+2\omega'; \quad \frac{l_0}{2}+2\omega'$$

$$-\omega+\omega' \qquad\qquad \omega+\omega'$$

$$-\frac{l_0}{2} \quad ; \quad \frac{l_0}{2}$$

gebildete Sechseck in der z-Ebene. Es kann allseitig erweitert werden, ohne aus dem gemeinsamen Regularitätsgebiet der Funktionen $\zeta_l(z)$ mit $l_0 \leqq l$ herauszutreten oder ein nicht schlichtes Bildgebiet zu liefern. In der folgenden, damit als zulässig erkannten Anwendung des *Verzerrungssatzes* werden die Längen $2\omega_l$ und $2\,|\,\omega_l'\,|-2$ der in Fig. 7 hervorgehobenen Geradenstücke in Beziehung gesetzt zur Länge des Kreisbogens, der aus der Strecke $-\frac{l_0}{2} \leqq z \leqq \frac{l_0}{2}$ entsteht und jedenfalls kleiner als π ist:

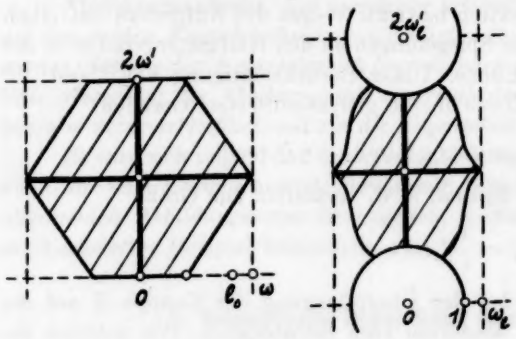


Fig. 7.

$$\frac{2\omega_l}{\pi} < Q\,\frac{2\omega}{l_0}; \quad \frac{2\,|\,\omega_l'\,|-2}{\pi} < Q\,\frac{2\,|\,\omega'\,|}{l_0}.$$

Q ist dabei eine von l unabhängige Verzerrungsschranke. Selbstverständlich sind ω_l und $|\,\omega_l'\,|$ größer als Eins. Wir erhalten

$$1 < \omega_l < Q\pi\,\frac{\omega}{l_0}; \quad 1 < |\,\omega_l'\,| < Q\pi\,\frac{|\,\omega'\,|}{l_0}+1 \quad \text{für} \quad 0 < l_0 \leqq l < \omega.$$

Wenn man an die Rechteckstruktur der Bereiche B_l und B_l denkt, entnimmt man aus diesen Abschätzungen die gleichmäßige Beschränktheit der Funktionen $\zeta_l(z)$ mit $0 < l_0 \leqq l < \omega$ in jedem endlichen Teilbereich von B_ω.

Auf Grund der letztgenannten Tatsache kann man eine Folge von Funktionen $\zeta_{l_j}(z)$ mit $\lim\limits_{j\to\infty} l_j = \omega$ auswählen, die in jedem abgeschlossenen Teilbereich des Parallelstreifens s_0 gleichmäßig konvergiert. Die mit $\zeta_\omega(z)$ bezeichnete, innerhalb s_0 reguläre Grenzfunktion ist nicht konstant, da sie der Relation

$$\zeta_\omega(z+2\omega) = \zeta_\omega(z) + 2\omega_\omega \quad \text{mit} \quad \omega_\omega = \lim_{j\to\infty} \omega_{l_j} \geqq 1$$

genügt; dies ergibt sich aus dem ersten der Homomorphismen von $\zeta_{l_j}(z)$ durch Grenzübergang. Die Grenzfunktion leistet demnach eine eineindeutige, konforme und schlichte Abbildung des Streifens s_0. Über jedes Randstück von s_0, das keinen der Kontaktpunkte

$$z = (2\lambda+1)\,\omega \quad \text{bzw.} \quad z = (2\lambda+1)\,\omega + 2\omega'$$

enthält, sind fast alle Näherungsfunktionen durch Spiegelung regulär fortsetzbar, wobei ersichtlich die gleichmäßige Beschränktheit gewahrt bleibt. Die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge und damit die Regularität der Grenzfunktion erstreckt sich somit auch auf diese Randstücke. Das Grenzbild eines solchen Randstückes ist jedenfalls ein Kreisbogen vom Radius Eins, da dies für fast alle Näherungsbilder zutrifft.

Es ist nun zu klären, in welcher Weise sich die Kreisbögen zusammenschließen, die aus den offenen, zwischen je zwei benachbarten Kontaktpunkten gelegenen Randstücken hervorgehen. Wir betrachten die Grenzfunktion in einer Halbkreisumgebung eines der

kritischen Punkte z^* und konstruieren darin eine Folge von getrennt liegenden Halbkreisringen um z^*, die durch Homothetien mit dem Zentrum z^* auseinander hervorgehen und sich allmählich auf den Punkt z^* zusammenziehen. Die Funktion $\zeta_\omega(z)$ ist zu beiden Seiten dieses Punktes durch Spiegelung regulär und mit schlichtabbildendem Charakter fortsetzbar, so daß auf die einander ähnlichen Halbkreisringe der *Verzerrungssatz* mit einer einheitlichen Verzerrungsschranke anwendbar ist. Die Flächeninhalte der durch $\zeta_\omega(z)$ entworfenen, ebenfalls getrennt liegenden unendlich vielen Bilder der Halbkreisringe müssen offenbar gegen Null abnehmen; für die Längen der Bilder etwa der inneren Halbkreislinien kann also nichts anderes gelten. Da diese Bildlinien zwei benachbarte Randkreisbögen des Bildbereiches σ_0 von s_0 miteinander verbinden, müssen sich diese Kreisbögen treffen. Der Schnittwinkel kann nicht von Null verschieden sein, weil sich sonst die Randkreise eines zu B_{l_j} gehörigen Näherungsbildes auch schon treffen müßten. Ferner muß der volle, von zwei sich berührenden Randkreisbögen berandete Gebietszipfel als Bild der Halbkreisumgebung von z^* und der Kontaktpunkt selbst als Bild von z^* erscheinen. Damit soll gesagt werden, daß das Bildgebiet σ_0 außer den genannten Kreisbögen und ihren Kontaktpunkten keine weiteren, etwa aus den Kontaktstellen herauswachsenden Randteile aufweisen kann.

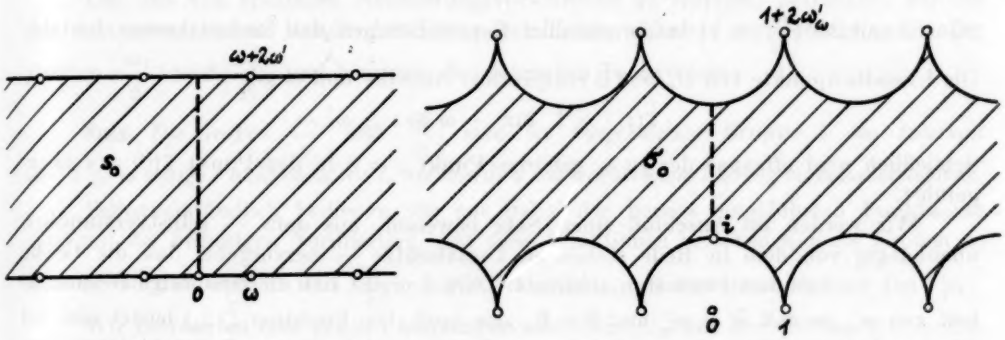


Fig. 8.

Beachtet man schließlich die dem angegebenen Homomorphismus von $\zeta_\omega(z)$ entsprechende periodische Struktur des Bildbereiches in Verbindung mit der Spiegelsymmetrie bezüglich der die Punkte $\zeta_\omega(0) = i$ und $\zeta_\omega(\omega')$ enthaltenden, vertikalen Geraden — diese Symmetrie bleibt während des Approximationsprozesses durchweg erhalten — so ist damit die vollständige Rechtfertigung der in Fig. 8 angegebenen girlandenförmigen Gestalt von σ_0 geleistet. Inbsesondere ergibt sich

$$\lim_{j\to\infty} \omega_{l_j} = \omega_\omega = 1; \quad \lim_{j\to\infty} \frac{\omega'_{l_j}}{i} = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{i}\, \zeta_{l_j}(\omega') = \frac{\omega'_\omega}{i} > 1.$$

In den übrigen Streifen von B_ω konvergiert unsere Folge auf Grund der Homomorphismen der Näherungsfunktionen ebenfalls. Für die Grenzfunktion ergibt sich

$$\zeta_\omega(z + 2\omega') = \zeta_\omega(z) + 2\omega'_\omega.$$

Das durch $\zeta_\omega(z)$ entworfene Bild von B_ω ist also der aus σ_0 durch Translationen mit den Verschiebungsgrößen $\mu\, 2\omega'_\omega$ entstehende Kontaktkreisbereich B_ω. Er besitzt wieder zweifach periodische Struktur. Die zugehörige Gruppe T_ω wird durch die erzeugenden Verschiebungsgrößen $2\omega_\omega = 2$ und $2\omega'_\omega$ mit $\dfrac{\omega'_\omega}{i} > 1$ charakterisiert.

Man sieht hier übrigens sehr schön, daß die etwa in dem Grundstreifen s_0 betrachtete Funktion $\zeta_\omega(z)$ sehr wohl über die einzelnen Randstücke des Streifens hinweg analytisch fortsetzbar ist; die Fortsetzung hat jedoch nicht das geringste mit der im Nachbarstreifen erklärten Funktion $\zeta_\omega(z)$ zu tun. Sie bildet vielmehr den Nachbarstreifen in einen der an σ_0 angrenzenden Halbkreise ab.

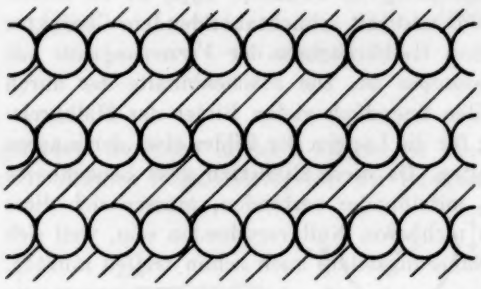


Fig. 9.

Mit der Unität der konstruierten Abbildung wollen wir uns im Rahmen dieses Beispiels nur so weit beschäftigen, als es dessen Anwendbarkeit im folgenden erfordert. Wir werden zeigen, daß die Grenzfunktion jeder gleichmäßig konvergenten Folge von Funktionen $\zeta_{l_j}(z)$ mit $\lim\limits_{j\to\infty} l_j = \omega$ die Funktion $\zeta_\omega(z)$ ist. Jede solche Grenzfunktion $\tilde{\zeta}(z)$ bildet, wie wir gesehen haben, den Kontaktbereich B_ω auf einen Kontaktkreisbereich $\tilde{\mathsf{B}}$ ab, dessen Berandung von den einer Gruppe $\tilde{\mathsf{T}}$ mit erzeugenden Verschiebungsgrößen $2\tilde{\omega} = 2$ und $2\tilde{\omega}'\left(\frac{\tilde{\omega}'}{i} > 1\right)$ entsprechenden Reproduktionen des Einheitskreises besteht. Die Unendlichpunkte von B_ω und $\tilde{\mathsf{B}}$ entsprechen einander und es gilt

$$|\tilde{\zeta}(z)| = 1 \quad \text{für} \quad -\omega \leqq z \leqq \omega.$$

Schließlich wird offenbar der zu s_0 gehörige Punkt $z = 0$ in den Punkt $\tilde{\zeta}(0) = i$ übergeführt.

Wir werden im Anschluß einen Satz beweisen, aus dem — selbstverständlich unabhängig von dem in Rede stehenden Unitätssatze — hervorgeht, daß die Größe $|\omega_l'|$ mit wachsendem l monoton abnimmt. Daraus ergibt sich die eindeutige Bestimmtheit von ω_ω', so daß $\tilde{\omega}' = \omega_\omega'$ und $\tilde{\mathsf{B}} = \mathsf{B}_\omega$ sein muß. Die Funktion $\tilde{\zeta}(\zeta_\omega)$ leistet also bei interner Interpretation eine umkehrbar eindeutige und konforme Selbstabbildung insbesondere von σ_0.

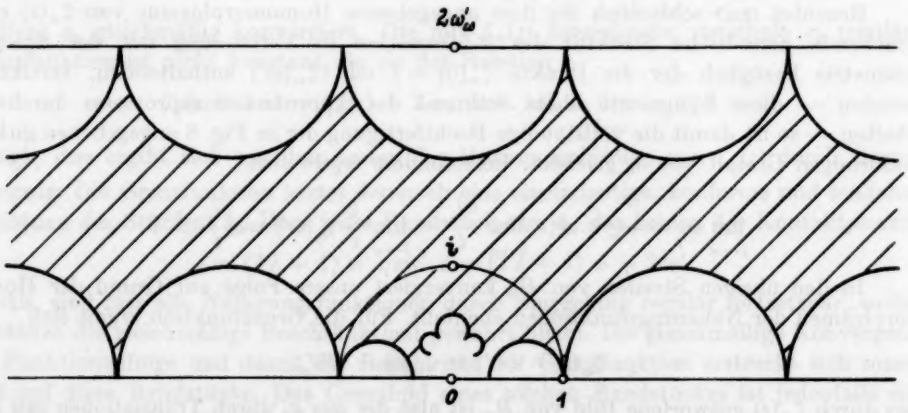


Fig. 10.

Setzt man die Funktion durch Spiegelung an der oberen Hälfte der Peripherie des Einheitskreises analytisch fort, so erhält man eine Selbstabbildung des entstehenden

einfach zusammenhängenden Erweiterungsbereiches von σ_0 mit dem Fixpunkt $\zeta_\omega = i$ im Inneren; der Richtungsstern in diesem Punkte bleibt fest. Daraus ergibt sich bekanntlich, daß die Abbildung die Identität ist, also $\tilde{\zeta} = \zeta_\omega$ in σ_0 gilt. Aus den Homomorphismen (vgl. S. 111) folgt schließlich die Übereinstimmung der Funktionen auch in den übrigen Streifen von B_ω.

Wir können nunmehr im Sinne einer auf jeder abgeschlossenen Teilmenge von B_ω gleichmäßigen Konvergenz die Relation $\lim\limits_{l \to \omega} \zeta_l(z) = \zeta_\omega(z)$ konstatieren. Besonders angemerkt seien die daraus resultierenden Relationen

$$\lim_{l \to \omega} \omega_l = \omega_\omega = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{l \to \omega} \frac{\omega_l'}{i} = \frac{\omega_\omega'}{i} > 1.$$

Wenn nunmehr auch das spezielle Kontaktproblem als solches — die Abbildung des Kontaktschlitzbereiches B_ω auf einen Kontaktkreisbereich — bewältigt ist, so ist es doch nicht ohne Reiz, die hier vergleichsweise übersichtlichen Verhältnisse bei der Abbildung des veränderlich vorzustellenden Bereiches B_l auf einen Kreisbereich noch etwas näher zu untersuchen. Besonders interessant scheint das Verhalten der für die Gruppe T_l charakteristischen Größen ω_l und ω_l' zu sein.

Um uns von speziellen Normierungsvorschriften zu befreien, betrachten wir die mit dem gemeinsamen Randkreisradius ϱ_l gebildeten, offenbar normierungsinvarianten Größen $\left|\frac{\omega_l}{\varrho_l}\right|$ und $\left|\frac{\omega_l'}{\varrho_l}\right|$ und beweisen den folgenden Sachverhalt:

Satz. *Die Größen* $\left|\frac{\omega_l}{\varrho_l}\right|$ *und* $\left|\frac{\omega_l'}{\varrho_l}\right|$ *sind bei festgehaltener Gruppe* $\mathfrak{T}$ *im Intervall* $0 < l \leqq \omega$ *stetige Funktionen von* l, *die überdies mit wachsendem* l *streng monoton abnehmen.*

Selbstverständlich bedienen wir uns dabei der bereits eingeführten Funktionen $\zeta_l(z)$ mit der bisherigen Normierung. Auf diese Funktionen beziehen sich die Größen ω_l und ω_l', so daß $\omega_l > 1$ und $\frac{\omega_l'}{i} > 1$ gilt, während $\varrho_l = 1$ zu setzen ist.

Wir betrachten eine gegen l konvergierende Folge $\{l_j\}$ mit $0 < l < \omega$; $0 < l_j < \omega$ und die zugehörigen Abbildungsfunktionen $\zeta_{l_j}(z)$. In jedem abgeschlossenen Teilbereich von B_l sind fast alle $\zeta_{l_j}(z)$ eindeutig, regulär und schlichtabbildend. Wegen der Beschränktheit von ω_{l_j} und ω_{l_j}' dürfen wir annehmen, daß die $\zeta_{l_j}(z)$ eine gleichmäßig approximierte Grenzfunktion $\tilde{\zeta}_l(z)$ besitzen, die sich als mit $\zeta_l(z)$ identisch herausstellen wird. Wie üblich erhält man durch Grenzübergang aus den Homomorphismen der Näherungsfunktionen entsprechende Homomorphismen

$$\tilde{\zeta}_l(z + 2\omega) = \tilde{\zeta}_l(z) + 2\tilde{\omega}_l \quad \text{mit} \quad \tilde{\omega}_l = \lim_{j \to \infty} \omega_{l_j} \geqq 1,$$

$$\tilde{\zeta}_l(z + 2\omega') = \tilde{\zeta}_l(z) + 2\tilde{\omega}_l' \quad \text{mit} \quad \frac{\tilde{\omega}_l'}{i} = \lim_{j \to \infty} \frac{\omega_{l_j}'}{i} \geqq 1$$

der Grenzfunktion $\tilde{\zeta}_l(z)$. Diese ist demnach insbesondere nicht konstant und bildet mithin den Bereich B_l auf einen schlichten Bereich ab. Die beiden Ufer des Schlitzes $-l < z < l$ ausschließlich der Endpunkte gehen in zwei Bögen des Einheitskreises über (Regularität und gleichmäßige Beschränktheit fast aller $\zeta_{l_j}(z)$ auf beiden Ufern jedes abgeschlossenen Teilschlitzes). Zur Untersuchung des Verhaltens in den Schlitzendpunkten führt man eine Umgebung eines dieser Punkte unter Zuhilfenahme einer elementaren Hilfsgröße $u(z)$ in eine Halbkreisumgebung des Punktes $u = 0$ über, der dabei dem kritischen Punkte entsprechen soll, und betrachtet $\tilde{\zeta}_l$ in Abhängigkeit von u. Durch

Schlüsse, die denen bei der Abbildung des Kontaktschlitzbereiches völlig entsprechen, erkennt man, daß die beiden Randkreisbögen auf der Peripherie des Einheitskreises $|\tilde{\zeta}_l| = 1$ zusammenstoßen müssen; auch können keine weiteren Randteile von den Treffpunkten ausstrahlen.

Die Funktion $\tilde{\zeta}_l(z)$ bildet demzufolge den Schlitz $-l \leqq z \leqq l$ auf die Peripherie des Einheitskreises und gemäß den angegebenen Homomorphismen den Bereich B_l auf einen Kreisbereich ab. Wegen des Unitätssatzes und der übereinstimmenden Normierung der Größen $\tilde{\zeta}_l$ und ζ_l sind diese miteinander identisch.

Daraus ergibt sich in geläufiger Weise die Konvergenz jeder Funktionenfolge $\{\zeta_{l_j}\}$ mit $\lim\limits_{j\to\infty} l_j = l$ gegen ζ_l und insbesondere die behauptete Stetigkeitsaussage in der Form

$$\lim_{l\to l_0} \omega_l = \omega_{l_0} \quad \text{und} \quad \lim_{l\to l_0} \omega_l' = \omega_{l_0}' \quad \text{für} \quad 0 < l_0 < \omega.$$

Für $l_0 = \omega$ sind uns diese Relationen bereits bekannt.

Des weiteren haben wir die Ungleichheiten

$$\omega_{l_1} > \omega_{l_2} \quad \text{und} \quad |\omega_{l_1}'| > |\omega_{l_2}'| \quad \text{für} \quad 0 < l_1 < l_2 < \omega$$

zu beweisen. Wegen der Stetigkeit der je an eine Gerade gefesselten Größen ω_l und ω_l' genügt es, die Fälle $\omega_{l_1} = \omega_{l_2}$ und $\omega_{l_1}' = \omega_{l_2}'$ auszuschließen, um die Monotonieeigenschaft schlechthin sicherzustellen. Daß ω_l dann monoton abnimmt, ist wegen

$$\omega_l > 1; \quad \lim_{l\to\omega} \omega_l = 1$$

klar; um die abnehmende Tendenz von $|\omega_l'|$ nachzuweisen, werden wir den Grenzübergang $l \to 0$ durchführen.

Als wichtiges Beweishilfsmittel dient uns der folgende, inhaltlich durchaus bekannte

Hilfssatz. *$\mathfrak{B}$ sei ein einfach zusammenhängender, schlichter Bereich mit mehr als einem Randpunkt. Durch die innerhalb $\mathfrak{B}$ reguläre Funktion $z' = f(z)$ werde $\mathfrak{B}$ auf einen Teilbereich $\mathfrak{B}' \leqq \mathfrak{B}$ abgebildet und zwar so, daß in einem inneren Punkte z_0*

$$f(z_0) = z_0 \quad \textit{und} \quad f'(z_0) > 0$$

gilt. Dann ist entweder $f(z) = z$ oder $f'(z_0) < 1$.

Beweis. Mit Hilfe des Riemannschen Abbildungssatzes können wir den Fall herstellen, daß $\mathfrak{B}$ das Innere des Einheitskreises und z_0 der Nullpunkt ist. $f(z)$ ist dann für $|z| < 1$ regulär und genügt den Voraussetzungen des Schwarzschen Lemmas:

$$|f(z)| < 1 \quad \text{für} \quad |z| < 1 \quad \text{und} \quad f(0) = 0.$$

Dieses liefert für den Betrag der innerhalb des Einheitskreises regulären Funktion $\frac{f(z)}{z}$ die Ungleichheit $\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leqq 1$, aus der wir sofort

$$f'(0) = \left(\frac{f(z)}{z}\right)_{z=0} \leqq 1$$

entnehmen. Im Falle $f'(0) = 1$ muß durchweg $\left|\frac{f(z)}{z}\right| = 1$ gelten, wegen $f'(0) > 0$ also $f(z) = z$. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Man denke sich nun den Bereich B_{l_2}, der ein echter Teilbereich von B_{l_1} ist, vermöge der Funktion $\zeta_{l_1}(z)$ auf die ζ_{l_1}-Ebene übertragen. Die Berandung des Bildbereiches besteht aus den der Gruppe T_{l_1} entsprechenden, rechteckförmig angeordneten Reproduktionen des Einheitskreises, an welchen beiderseits in symmetrischer Weise Stacheln

angesetzt sind, die auf der Achse des Reellen liegen. Die Funktion ζ_{l_2}, in Abhängigkeit von ζ_{l_1} betrachtet, leistet eine eineindeutige und konforme Abbildung dieses Bereiches auf B_{l_2}, wobei die Symmetriegeraden (Halbgitterlinien) einander einzeln entsprechen. Insbesondere gehen die durch Eintragung der Gitterlinien in beiden Bereichen entstehenden, zweifach zusammenhängenden Parzellen je ineinander über. Es erscheint zweckmäßig, die durch $\zeta_{l_2}(\zeta_{l_1})$ geleistete Abbildung im Moment intern zu interpretieren.

Im Falle $\omega_{l_1} = \omega_{l_2}$, $|\omega'_{l_1}| \geqq |\omega'_{l_2}|$ betrachten wir die obere Hälfte der den Nullpunkt umschließenden Grundparzelle in der ζ_{l_1}-Ebene und denken uns die in Rede stehende Abbildung über die obere Hälfte der Peripherie des Einheitskreises durch Spiegelung fortgesetzt. Der in der Figur stark umrandete Bereich $\mathfrak{B}$ wird dann in den punktiert berandeten, echten Teilbereich übergeführt. Der innere Punkt $\zeta_{l_1} = i$ bleibt offenbar mitsamt seinem

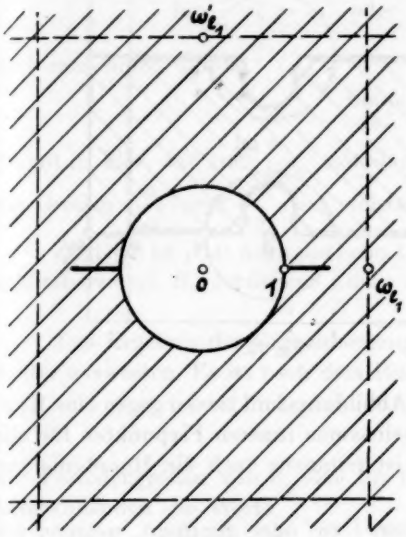


Fig. 11.

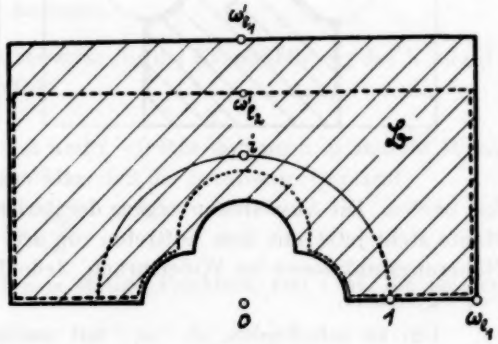


Fig. 12.

Richtungsstern fest. Wir können somit unseren Hilfssatz zum Zuge bringen und erhalten die Alternative

$$\zeta_{l_1} = \zeta_{l_2} \text{ in } \mathfrak{B} \text{ oder } 0 < \left(\frac{d\zeta_{l_2}}{d\zeta_{l_1}}\right)_{\zeta_{l_1}=i} < 1.$$

Die zweite Möglichkeit kann als widerspruchsvoll nachgewiesen werden. Wenn man sich nämlich die Abbildung unbeschränkt iteriert denkt — das Zusammenschrumpfen des Bildbereiches macht dieses Vorgehen möglich — so bleibt einerseits für jede der Abbildungsfunktionen die Funktionalgleichung

$$\varphi(\zeta_{l_1} + 2\omega_{l_1}) = \varphi(\zeta_{l_1}) + 2\omega_{l_1}$$

maßgebend, während andererseits die Folge dieser Funktionen mindestens auswahlmäßig gegen eine innerhalb $\mathfrak{B}$ reguläre Grenzfunktion konvergiert; da die Ableitungen bei $\zeta_{l_1} = i$ in dem jetzt betrachteten Falle gegen Null konvergieren müßten, könnte die Grenzfunktion keine Schlichtabbildung leisten; eine Konstante kann sie aber auch nicht sein, weil sie selbst wieder obiger Funktionalgleichung genügen muß. Das ist ein Widerspruch.

Da eine Abbildung von $\mathfrak{B}$ auf einen echten Teilbereich vorliegt, ist aber auch die erste der genannten Möglichkeiten auszuschließen, so daß die eingangs gemachte Annahme nicht aufrechterhalten werden kann.

Entsprechende Überlegungen führen dazu, die Relationen $\omega_{l_1} = \omega_{l_2}$, $|\omega'_{l_1}| \leqq |\omega'_{l_2}|$ auszuschließen. Man betrachtet hier die inverse Abbildung mittels $\zeta_{l_1}(\zeta_{l_2})$, die den in der

Fig. 13 stark umrandeten Bereich in den punktiert berandeten, echten Teilbereich überführt, wobei der Punkt $\zeta_{l_1} = \omega_{l_2}$ nebst Richtungsstern fest bleibt. Die weiteren Schlüsse verlaufen wie eben und führen auf einen Widerspruch. Damit ist gemäß der Vorbemerkung die Monotonie und darüber hinaus das monotone Abnehmen von ω_l gesichert.

Der Fall $\omega_{l_1} > \omega_{l_2}$, $\omega'_{l_1} = \omega'_{l_2}$ erledigt sich durch die Betrachtung von Fig. 14. $\zeta_{l_2}(\zeta_{l_1})$ leistet eine Abbildung des stark berandeten auf den punktiert berandeten Bereich, wobei die Punkte $\zeta_{l_1} = i$; $\zeta_{l_1} = \omega'_{l_1}$; $\zeta_{l_1} = 2\omega'_{l_1} - 2i$ je einschließlich des Richtungssternes

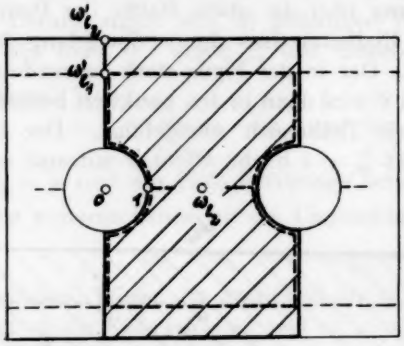


Fig. 13.

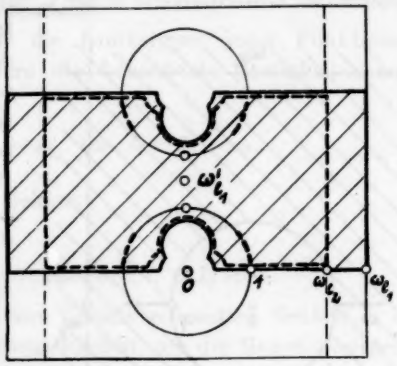


Fig. 14.

fest bleiben. Die Auswahlkonvergenz der iterierten Abbildungsfunktionen gegen eine Konstante steht jetzt mit dem Auftreten von drei gemeinsamen inneren Fixpunkten für alle Näherungsfunktionen im Widerspruch. Jedenfalls ist nunmehr auch die Monotonie von $|\omega'_l|$ gesichert.

Um zu entscheiden, ob $|\omega'_l|$ mit wachsendem l zu- oder abnimmt, nehmen wir den Grenzübergang $l \to 0$ vor. Die Abbildungsfunktionen $\zeta_l(z)$ selbst werden hierbei nicht konvergieren. Wir betrachten an ihrer Stelle die umnormierten Funktionen $\frac{\omega}{\omega_l}\zeta_l(z)$ und notieren die gegenüber $\zeta_l(z)$ veränderten Eigenschaften

$$\left|\frac{\omega}{\omega_l}\zeta_l(z)\right| = \frac{\omega}{\omega_l} = \text{const.} \quad \text{für } -l \leqq z \leqq l, \quad \frac{\omega}{\omega_l}\zeta_l(\omega) = \omega.$$

Die in den Punkten $z = \lambda 2\omega + \mu 2\omega'$ ($\lambda, \mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) punktierte z-Ebene bezeichnen wir sinngemäß mit B_0. In jedem abgeschlossenen Teilbereich von B_0 sind alle Funktionen $\frac{\omega}{\omega_l}\zeta_l(z)$ mit hinreichend kleinem l eindeutig, regulär und schlichtabbildend. Die Anwendung des *Verzerrungssatzes* auf den Rand des Rechtecks mit den Ecken $\pm\omega \pm \omega'$ liefert die Beschränktheit der Periodengröße $\frac{\omega}{\omega_l}\omega'_l$ (die andere ist konstant gleich ω) und damit die gleichmäßige Beschränktheit der Funktionen $\frac{\omega}{\omega_l}\zeta_l(z)$ in jedem abgeschlossenen Teilbereich von B_0, soweit diese Funktionen dort regulär erklärt sind. Eine Folge von Funktionen $\frac{\omega}{\omega_{l_j}}\zeta_{l_j}(z)$ mit $\lim\limits_{j\to\infty} l_j = 0$ konvergiert gleichmäßig gegen eine innerhalb B_0 eindeutige und reguläre Funktion $\zeta_0(z)$. Da sich die Normierung und die Homomorphismen von den Näherungsfunktionen auf die Grenzfunktion übertragen, ist diese Funktion keine Konstante, sondern entwirft ein schlichtes Bildgebiet von B_0. Gemäß dem Riemannschen Satze von der hebbaren Unstetigkeit schließt sich $\zeta_0(z)$ regulär über die Punktierungs-

stellen hinweg und ist somit eine ganz lineare Funktion. Es folgt, daß die Kreisradien $\frac{\omega}{\omega_{l_j}}$ gegen Null abnehmen müssen, da sonst die Näherungsbilder beliebig kleiner Kreise um den Punkt $z = 0$ eine positive Mindestlänge haben müßten, was mit dem Charakter der Grenzfunktion nicht verträglich wäre. Insbesondere gilt $\zeta_0(0) = 0$, und dies führt in Verbindung mit $\zeta_0(\omega) = \omega$ auf $\zeta_0(z) = z$. Jede Folge $\left\{\frac{\omega}{\omega_{l_j}}\,\zeta_{l_j}(z)\right\}$ mit $\lim\limits_{j\to\infty} l_j = 0$ konvergiert somit gegen die Identität. Wir erhalten speziell

$$\lim_{l\to 0}\frac{\omega}{\omega_l}\,\omega_l' = \omega' \quad \text{oder} \quad \lim_{l\to 0}\frac{\omega_l'}{\omega_l} = \frac{\omega'}{\omega} \quad \text{neben} \quad \lim_{l\to 0}\frac{\omega}{\omega_l} = 0$$

und entnehmen daraus

$$\lim_{l\to 0}\omega_l = \lim_{l\to 0}|\,\omega_l'\,| = \infty.$$

Damit ist klar, daß auch $|\,\omega_l'\,|$ mit wachsendem l monoton abnimmt, und unser Satz über die Größen $\left|\frac{\omega_l}{\varrho_l}\right|$ und $\left|\frac{\omega_l'}{\varrho_l}\right|$ ist vollständig bewiesen.

Zugleich ist jetzt auch die beim Unitätsbeweise für die Kreisabbildung des Kontaktschlitzbereiches B_ω gebliebene Lücke ausgefüllt.

Das Ergebnis der Grenzübergänge $l \to \omega$ und $l \to 0$ läßt sich noch in anderer Weise weiter auswerten. Es ist nach dem Bisherigen klar, daß der invariante Quotient

$$\tau_l = \frac{\omega_l'}{\omega_l}$$

der Periodengrößen von B_l eine für $0 \leqq l \leqq \omega$ stetige Funktion von l ist, die an den Intervallenden die Werte

$$\tau_0 = \frac{\omega'}{\omega} \quad \text{bzw.} \quad \tau_\omega = \omega_\omega' \quad \text{mit} \quad |\,\tau_\omega\,| = |\,\omega_\omega'\,| > 1$$

annimmt und auf der Halbachse des positiv-Imaginären variiert. Ist das Grundrechteck von B_l ein „flaches", d. h. gilt

$$|\,\tau_0\,| = \left|\frac{\omega'}{\omega}\right| < 1,$$

so existiert ein Wert l^* von solcher Beschaffenheit, daß

$$0 < l^* < \omega \quad \text{und} \quad \tau_{l^*} = \frac{\omega_{l^*}'}{\omega_{l^*}} = i$$

ist, die Gruppe T_{l^*} also vom *lemniskatischen* (oder *harmonischen*) Typ. Dieses ein wenig überraschende Ergebnis soll noch genauer untersucht werden.

Mit gleichen Mitteln wie in den vorangegangenen Betrachtungen läßt sich auch die Monotonie von $|\,\tau_l\,|$ beweisen. Es genügt wieder, aus $\tau_{l_1} = \tau_{l_2}$ für $0 < l_1 < l_2 < \omega$ einen Widerspruch herzuleiten. Wir verwenden in diesem Falle die Funktion $\zeta_{l_1}(z)$ mit den üblichen Normierungseigenschaften und die Funktion $\frac{\omega_{l_1}}{\omega_{l_2}}\,\zeta_{l_2}(z)$ mit

$$\left|\frac{\omega_{l_1}}{\omega_{l_2}}\,\zeta_{l_2}(z)\right| = \frac{\omega_{l_1}}{\omega_{l_2}} = \text{const.} \quad \text{für} \quad -l_2 \leqq z \leqq l_2, \quad \frac{\omega_{l_1}}{\omega_{l_2}}\,\zeta_{l_2}(\omega) = \zeta_{l_1}(\omega) = \omega_{l_1}.$$

Wegen $\tau_{l_1} = \tau_{l_2}$ und der uns bereits bekannten Monotonieeigenschaft von ω_l folgt dann

$$\frac{\omega_{l_1}}{\omega_{l_2}}\,\zeta_{l_2}(\omega') = \zeta_{l_1}(\omega') = \omega_{l_1}' \quad \text{und} \quad \frac{\omega_{l_1}}{\omega_{l_2}} > 1.$$

Wir überpflanzen wieder die Funktion $\frac{\omega_{l_1}}{\omega_{l_2}}\zeta_{l_2}$ auf den durch $\zeta_{l_1}(z)$ von B_{l_1} entworfenen Bildbereich. Die durch $\frac{\omega_{l_1}}{\omega_{l_2}}\zeta_{l_2}(\zeta_{l_1})$ bewirkte Abbildung dieses Bereiches führt den in Fig. 15 hervorgehobenen, streifenförmigen Bereich in den punktiert berandeten, echten Teilbereich über und läßt die Punkte $\zeta_{l_1} = \lambda 2\omega_{l_1} + \omega'_{l_1}$ $(\lambda = 0, \pm 1, \ldots)$ nebst Richtungsstern fest (interne Interpretation). Unter Verwendung unseres Hilfssatzes führt dies in der bekannten Weise zu Unmöglichkeiten.

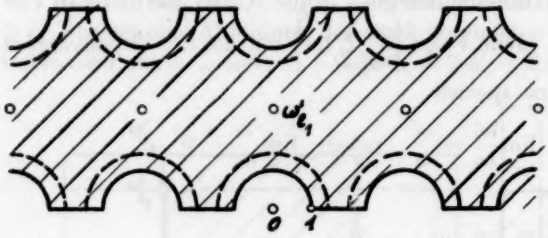


Fig. 15.

Auf Grund der Monotonieeigenschaft von $|\tau_l|$ können wir das Auftreten einer lemniskatischen Gruppe T_{l^*} genauer festlegen:

Satz. *Eine Schlitzlänge l^* mit $0 < l^* < \omega$ und $\tau_{l^*} = i$ existiert genau dann, wenn $|\tau_0| = \left|\frac{\omega'}{\omega}\right| < 1$ gilt; l^* ist in diesem Falle eindeutig bestimmt.*

Im Falle $\tau_0 = i$ hätte man sinngemäß $l^* = 0$ zu setzen.

Der Bereich B_{l^*} besitzt die charakteristische Eigentümlichkeit, außer den elementaren Translations- und Spiegelungssymmetrien eine weitere eineindeutige und konforme Selbstabbildung zu gestatten, die der 90°-Drehung des Bereiches B_{l^*} um den Nullpunkt entspricht. Es handelt sich um eine selbstverständlich nicht lineare Abbildung der Periode Vier, die das geschlitzte Grundrechteck mit den Ecken $z = \pm\omega \pm \omega'$ in sich überführt und dabei die folgende Punktezuordnung leistet:

Original:	l^*	0^+	$-l^*$	0^-	ω	$\omega + \omega'$
Bild:	0^+	$-l^*$	0^-	l^*	ω'	$-\omega + \omega'$.

0^+ bzw. 0^- sind die beiden Punkte mit $z = 0$ auf dem oberen bzw. unteren Schlitzufer.

Die Verwendung elliptischer Funktionen ermöglicht die ausdrucksmäßige Bestimmung der kritischen Schlitzlänge $2l^*$. Wir bilden die zu den Grundperioden 2ω und $2\omega'$ gehörige Weierstraßsche Funktion $\wp(z \mid \omega, \omega')$ und bezeichnen die (reellen) Werte von $\wp z$ in den Halbgitterpunkten $z = \omega, \omega + \omega', \omega'$ in der üblichen Weise mit e_1, e_2, e_3. Es gilt

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0 \quad \text{und} \quad e_3 < e_2 < e_1.$$

Außerdem setzen wir $\wp l^* = e^*$. Auf Grund der bekannten Abbildungseigenschaften der $\wp$-Funktion ergibt sich

$$0 < e_1 < e^*.$$

Wir denken uns nun zwei koinzidierende Exemplare des Grundrechtecks von B_{l^*} längs der Randschlitze überkreuz verheftet. Auf dem so entstehenden zweiblättrigen Riemannschen Flächenstück mit Windungspunkten über den Stellen $z = \pm l^*$ breiten wir die Funktion

$$w(z) = \sqrt{e^* - \wp z}$$

aus. Denkt man sich die Rechteckränder, wie in Fig. 16 angegeben, kongruent aufeinander bezogen, so entsteht eine in der Idee geschlossene Riemannsche Fläche vom topologischen Typ eines *Doppeltorus* (Geschlecht $p = 2$), auf der die Funktion $w(z)$, wie man leicht sieht, eindeutig ist. Die Bildfläche ist ihrerseits eine geschlossene Riemannsche Fläche,

und zwar eine zweiblättrige, da $w(z)$ nur zwei einfache Nullstellen bei $z = \pm l^*$ besitzt. Die notwendigerweise erscheinenden sechs Windungspunkte liegen über den Stellen $w = \pm\sqrt{e^* - e_j}$ $(j = 1, 2, 3)$ symmetrisch zum Nullpunkt über der Achse des Reellen. Die Verheftungslinie über $-l^* \leqq z \leqq l^*$ wird abgebildet auf die über der Achse des Imaginären liegende Doppelgerade in der Bildfläche.

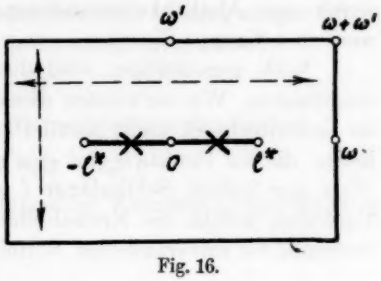


Fig. 16.

Die charakteristische Selbstabbildung des Grundrechtecks von B_{l^*} läßt sich als solche über die zweiblättrige Rechteckfläche fortsetzen, wobei jedes Blatt in sich übergeführt wird. Auf der w-Fläche erscheint sie demnach als eine eineindeutige und konforme Selbstabbildung dieser Fläche, welche die beiden durch die erwähnte Doppelgerade getrennten, symmetrischen Hälften der Fläche je in sich überführt. Nun wird bekanntlich *jede Interntransformation einer hyperelliptischen Riemannschen Fläche mit $p \geqq 2$ durch eine lineare Transformation* bewirkt[12]). Die der oben angeführten, für das eine Blatt der Rechteckfläche maßgebenden Punkteordnung entsprechende Zuordnungsvorschrift in der w-Spurebene

Original:	$w(\pm l^*) = 0$	$w(0^\pm) = \infty$	$w(\omega + \omega') = +\sqrt{e^* - e_2}$
Bild:	$w(0^\pm) = \infty$	$w(\mp l^*) = 0$	$w(-\omega + \omega') = +\sqrt{e^* - e_2}$ (*Fixpunkt*)

legt die lineare Transformation eindeutig fest. Sie lautet

$$w' = \frac{e^* - e_2}{w}.$$

Die Punkte $w(\omega) = \pm\sqrt{e^* - e_1}$ gehen über in die Punkte $w'(\omega) = w(\omega') = \pm\sqrt{e^* - e_3}$, wobei sich übrigens, da die rechte und die linke Halbebene je in sich übergehen, die positiven und die negativen Werte der Quadratwurzeln einzeln entsprechen.

Es ergibt sich die Relation

$$(e^* - e_2)^2 = (e^* - e_1)(e^* - e_3)$$

oder nach einfachen Umformungen

$$\wp l^* = e^* = \frac{e_2^2 - e_1 e_3}{3e_2} = e_1 + \frac{(e_1 - e_2)^2}{3e_2}.$$

Dadurch ist $l^* > 0$ eindeutig bestimmt, falls der Ausdruck auf der rechten Seite größer als e_1 ist. Offenbar reduziert sich diese Bedingung auf $e_2 > 0$. Dies ist gleichbedeutend mit der früher aufgestellten Bedingung $|\tau_0| = \left|\frac{\omega'}{\omega}\right| < 1$ für die Existenz einer kritischen Schlitzlänge, wie man etwa durch Vermittlung der *elliptischen Modulfunktion* $k^2(\tau)$ einsieht.

Wir können im Anschluß an diese Ergebnisse die vorhin offen gebliebene Frage beantworten, ob die bei der Kreisnormierung eines zweifach periodischen Bereiches entstehende Gruppe $\mathfrak{T}$ im Bilde mit der zum Originalbereiche gehörigen Gruppe $\mathfrak{T}$ in Übereinstimmung gebracht werden könne. Diese Frage ist im allgemeinen zu verneinen. Bei der Abbildung unserer Schlitzbereiche B_l zum Beispiel durchläuft der Grundperiodenquotient τ_l stetig das Intervall zwischen $\tau_0 = \frac{\omega'}{\omega}$ und $\tau_\omega = \omega'_\omega$ auf der Halbachse des

[12]) Lit. [5], 3. Mitteilung (1928), S. 397/98.

positiv-Imaginären, wenn l von 0 bis ω zunimmt. Dabei ist unabhängig von τ_0 stets $|\tau_\omega| > 1$. Geht man im Originalbereich von einer Gruppe $\mathfrak{T}$ mit $|\tau_0| = \left|\frac{\omega'}{\omega}\right| < 1$ aus, so müssen also unter den Gruppen T_l notwendig solche vorkommen, die sich nicht durch eine Ähnlichkeitstransformation in die Gruppe $\mathfrak{T}$ überführen lassen, beispielsweise die Gruppe T_{l^*}.

Noch augenfälliger wird dieser Sachverhalt, wenn wir unser Beispiel ein wenig modifizieren. Wir verwenden dieselbe Gruppe $\mathfrak{T}$ wie bisher, legen aber den Randschlitz im Grundrechteck nicht parallel zu einer Seite, sondern in eine Diagonale, etwa in diejenige, die die Punkte $\pm(\omega + \omega')$ enthält, und symmetrisch zum Nullpunkt. Für jeden Wert der halben Schlitzlänge l zwischen 0 und $|\omega + \omega'|$ existiert eine analytische Funktion, welche die Kreisabbildung des modifizierten, zweifach periodischen Schlitzbereiches bei unveränderter Normierung leistet. Unsere Schlußweise wird auch jetzt die

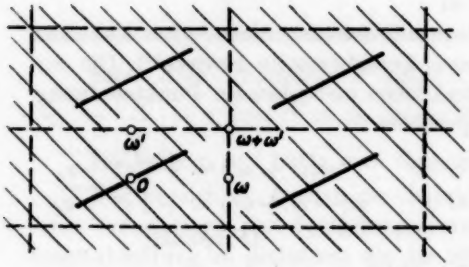


Fig. 17.

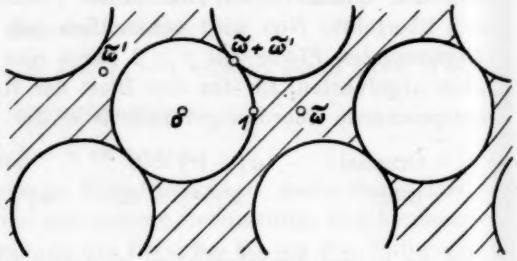


Fig. 18.

Existenz einer Grenzabbildung liefern, wenn l gegen $|\omega + \omega'|$ strebt. Die aus ω und ω' hervorgehenden Halbperioden $\tilde{\omega}$ und $\tilde{\omega}'$ des entstehenden Kontaktkreisbereiches können keinen rein imaginären Quotienten $\tilde{\tau} = \frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}}$ liefern, da doch gemäß dem von vornherein festliegenden Berührungsschema des Kontaktkreisbereiches offenbar $|\tilde{\omega} + \tilde{\omega}'| = 1$ und $\tilde{\omega} > 1$ gelten muß. Der zu den Näherungsbildbereichen gehörige Quotient $\tau_l = \frac{\omega_l'}{\omega_l}$ wird wie bisher bei fester Gruppe $\mathfrak{T}$ im abgeschlossenen Intervall $0 \leqq l \leqq |\omega + \omega'|$ eindeutig und stetig von l abhängen und an den Intervallenden die Werte $\tau_0 = \frac{\omega'}{\omega}$ mit $\Re\mathrm{e}\, \tau_0 = 0$ bzw. $\tilde{\tau} = \frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}}$ mit $\Re\mathrm{e}\, \tilde{\tau} \neq 0$ annehmen. Damit ist erneut gezeigt, daß jedenfalls für gewisse Werte von l die den entsprechenden Kreisbereich charakterisierende Gittergröße τ_l mit τ_0 in bezug auf die Modulgruppe nicht äquivalent ist; die zugehörigen Gruppen sind nicht mehr vom Rechtecktyp.

Es ist demnach gar nicht daran zu denken, daß man die Kreisnormierung eines zweifach periodischen Bereiches unter Erhaltung der zugehörigen Gruppe vornehmen könne. Nur in Ausnahmefällen wird man mit einer solchen Möglichkeit rechnen dürfen.

Interessant würde eine Untersuchung der Frage sein, ob der Originalbereich bei festem Gitter so gewählt werden kann, daß in der Bildebene ein beliebig vorgegebenes Gitter erscheint.

4. Der Existenzsatz.

Wir kehren nunmehr zum Falle eines allgemeinen zweifach periodischen Kontaktbereiches B zurück und beweisen zunächst die Existenz der in unserer Abbildungsaufgabe geforderten Kreisnormierungsabbildung.

Die im zweiten Abschnitt eingeführten, zweifach periodischen Näherungsbereiche B_ϱ können durch Funktionen $\zeta_\varrho(z)$, die innerhalb B_ϱ, insbesondere also auch innerhalb B eindeutig und regulär sind, auf schlichte, zweifach periodische Kreisbereiche B_ϱ konform abgebildet werden. Die bis auf ganze lineare Transformationen bestimmten Funktionen $\zeta_\varrho(z)$ werden dadurch vollständig festgelegt, daß wir im Inneren einer beliebig ausgewählten Zelle von B (*Grundzelle*) einen Punkt z_0 herausgreifen und vorschreiben, es solle

$$\zeta_\varrho(z_0) = 0 \quad \text{und} \quad \zeta_\varrho'(z_0) = 1$$

gelten. Die Abbildungsfunktionen haben dann bei z_0 Entwicklungen der Gestalt

$$\zeta_\varrho(z) = (z - z_0) + c_\varrho(z - z_0)^2 + o[(z - z_0)^2]$$

mit nicht näher fixierbarem c_ϱ. Zum Zwecke der nachfolgenden Konvergenzuntersuchung betrachten wir neben den $\zeta_\varrho(z)$ noch die Funktionen

$$\tilde{\zeta}_\varrho(z) = \frac{1}{\zeta_\varrho(z)},$$

die bei z_0 Entwicklungen der Form

$$\tilde{\zeta}_\varrho(z) = \frac{1}{z - z_0} - c_\varrho + o(1)$$

aufweisen und jeweils den Bereich B_ϱ auf einen schlichten Kreisbereich $\tilde{\mathsf{B}}_\varrho$ abbilden, dessen Randkreise sich gegen den Nullpunkt häufen.

Auf Grund des schon auf S. 102 verwendeten Hilfssatzes gilt

$$|\tilde{\zeta}_\varrho(z) + c_\varrho| < \frac{5}{r} \quad \text{für} \quad 0 < |z - z_0| = r \quad (r \textit{ klein});$$

da das $\tilde{\zeta}_\varrho$-Bild der Kreislinie $|z - z_0| = r$ den Nullpunkt umschließen muß, folgt

$$|c_\varrho| < \frac{5}{r} \quad \text{und daher} \quad |\tilde{\zeta}_\varrho(z)| < \frac{10}{r} \quad \text{längs} \quad |z - z_0| = r.$$

Wegen der Schlichtheit des Bildbereiches $\tilde{\mathsf{B}}_\varrho$ können wir hieraus auf

$$|\tilde{\zeta}_\varrho(z)| < \frac{10}{r} \quad \text{für alle } z \text{ aus } B \text{ mit } |z - z_0| \geqq r$$

schließen.

Es existiert demnach eine solche Folge $\{\varrho_j\}$ mit $\lim\limits_{j\to\infty} \varrho_j = 0$, daß die Funktionen $\tilde{\zeta}_{\varrho_j}(z)$ innerhalb jeder einzelnen Zelle von B gleichmäßig gegen eine dort eindeutige und reguläre Grenzfunktion $\tilde{\zeta}_0(z)$ konvergieren. Für die Grundzelle ergibt sich dies wie auf S. 103. Indem man von der so gewonnenen Folge immer wieder zu Teilfolgen übergeht, kann man nach und nach auch in allen übrigen Zellen von B die Konvergenz erzwingen und erhält schließlich durch Bildung einer *Diagonalfolge* im Cantorschen Sinne eine Folge mit den vorstehend genannten Eigenschaften.

Es sei nochmals darauf hingewiesen, daß unsere Redeweise nicht zu der Vorstellung Anlaß geben darf, daß $\tilde{\zeta}_0(z)$ eine analytische Funktion sei. Die innerhalb der einzelnen Zellen von B regulär erklärten Teile der Funktion werden nicht durch analytische Fortsetzung miteinander in Zusammenhang gebracht werden können.

Wir wollen uns überlegen, daß jede Zelle von B eineindeutig auf einen schlichten Bereich abgebildet wird und daß sich diese Bildbereiche schlicht nebeneinanderlagern. Das darzulegende Beweisverfahren stimmt genau überein mit dem von Koebe in seiner Arbeit über Kontaktprobleme angewendeten[13]). Es genügt nachzuweisen, daß sich $\tilde{\zeta}_0(z)$

[13]) Lit. [1], S. 158.

in keiner Zelle auf eine Konstante reduziert; dann kann man nämlich in der üblichen Weise von dem Schlichtheitscharakter der Näherungsfunktionen auf die entsprechende Eigenschaft der Grenzfunktion schließen.

Zunächst kann offenbar in der Grundzelle die Grenzfunktion nicht konstant sein, weil sie im Punkte z_0 denselben polartigen Entwicklungscharakter hat wie die Näherungsfunktionen. Die Näherungsbilder der Grundzelle bedecken, wie wir gesehen haben, sämtlich das Außengebiet des Kreises mit dem Radius $\frac{10}{r}$ um den Nullpunkt. Aus diesem Grunde haben die Randkreise von $\tilde{B}_\varrho$ durchweg Radien unterhalb $\frac{10}{r}$.

Ferner können die Radien der Kreise, die an der Berandung der Grundzellen-Näherungsbilder teilnehmen, nicht beliebig klein werden. Das gilt allgemein auch für jede andere Zelle, in der die Grenzfunktion nicht konstant ist und ergibt sich aus dem *Verzerrungssatze.* Jeder abgeschlossene, von Kontaktpunkten freie Randteil einer Zelle von B gehört nämlich vollständig zum Rande fast aller $B_{\varrho j}$ und wird somit durch fast alle $\tilde{\zeta}_{\varrho j}(z)$ auf einen Kreisbogen abgebildet. In die Ebene einer passenden solchen Näherungsfunktion verpflanzt, lassen sich alle folgenden $\tilde{\zeta}_{\varrho j}$ über den genannten Kreisbogen hinweg regulär und mit schlichtabbildendem Charakter ein Stück weit durch Spiegelung fortsetzen, wobei auch die gleichmäßige Abschätzbarkeit erhalten bleibt. Das hat zur Folge, daß sich die gleichmäßige Konvergenz der $\tilde{\zeta}_{\varrho j}$ und die Regularität und Schlichtheit der Grenzfunktion $\tilde{\zeta}_0$ bis über den Kreisbogen hinweg erstrecken. Das allmähliche, unbegrenzte Zusammenschrumpfen der Näherungsbilder des herausgegriffenen Randteiles führt daher zum Schrumpfen der Näherungsbilder der ganzen Zelle (*Verzerrungssatz*) und ist also nur dann möglich, wenn sich die Grenzfunktion in der Zelle als konstant erweist.

Unter Verwendung eines weiteren, elementaren Sachverhaltes können wir nun schließen, daß bei keiner Zelle eine Schrumpfung der Näherungsbilder eintreten kann. Es handelt sich um die evidente Feststellung: Wenn drei Punkte an drei verschiedene Kreise mit Radien oberhalb $R > 0$ gefesselt sind, von denen je zwei im Außen- oder im Innengebiet des dritten liegen, so vermag der Durchmesser des von den Punkten gebildeten Dreiecks eine gewisse positive, nur von R abhängige Schranke nicht zu unterschreiten.

Wir greifen nun eine beliebige Randlinie C_0 von B heraus, die mit anderen Randlinien in Kontakt stehen möge, und betrachten diejenigen endlich vielen Zellen $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots$ und Randlinien $C_1, C_2, C_3, \ldots$, die abwechselnd an C_0 anstoßen. Gemäß der ersten Kontaktbedingung gehören zu verschiedenen Kontaktpunkten verschiedene Randlinien, während die einzelnen Zellen sehr wohl mehrfach an C_0 herantreten können. Wir wollen annehmen, daß die Grenzfunktion $\tilde{\zeta}_0(z)$ in einer der Zellen, etwa in β_0, nicht konstant ist, während in der Nachbarzelle β_1 das Gegenteil eintritt. An der Berandung der Näherungsbilder von β_1 nehmen dann zwei nicht schrumpfende Kreise teil, nämlich die von C_0 und C_1 herrührenden. Der aus C_2 hervorgehende Kreis muß aber schrumpfen, weil sich die Konvergenz der Näherungsfunktionen auch auf die kontaktfreien Randbögen von β_1 erstreckt und somit gewisse Punkte der erwähnten drei Kreise beliebig kleine Dreiecke bilden müssen. Die Folge ist, daß auch die Näherungsbilder von β_2 zusammenschrumpfen, und zwar auf denselben Punkt wie die von β_1. Die Entstehung infinitesimaler Randpunkt-

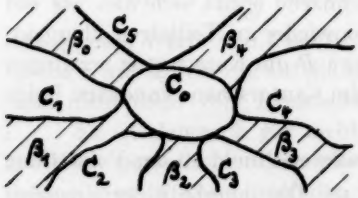


Fig. 19.

dreiecke führt nun zum Schrumpfen von C_3 und β_3 usf., bis schließlich das Schrumpfen von β_0 und damit ein Widerspruch erschlossen wird. Keine der Zellen, die an eine als nicht schrumpfend erkannte Zelle kontaktmäßig anstoßen, kann demnach eine Schrumpfung erfahren.

Sollten unerlaubterweise zwei der Kurven C_j identisch sein, so würde unsere kettenförmige Schlußweise eine nicht behebbare Unterbrechung erfahren und damit hinfällig werden. Tatsächlich erkennt man leicht, daß sich die Grenzfunktion in den Zellen β_1, β_2, β_3 notwendig auf eine Konstante reduzieren muß, wenn etwa die Kurven C_1 und C_4 zusammenfallen, d. h. wenn sie sich außerhalb unserer Figur zu einer der geschlossenen Randlinien von B zusammenfügen.

Wir können nun, ausgehend von der nicht schrumpfenden Grundzelle, nach und nach jede weitere Zelle erobern und damit die obige Behauptung über die gebietsmäßige Abbildung jeder einzelnen Zelle durch die Grenzfunktion sicherstellen.

Es ist klar, daß die konstruierte Abbildung die kontaktfreien Randbögen von B in Kreisbögen überführt, wobei die zur gleichen Randlinie gehörigen Bildkreisbögen auf einem Kreise liegen. Die entsprechenden Schlüsse sind schon so oft durchgeführt worden, daß sich eine erneute detaillierte Betrachtung erübrigen dürfte. Daß sich diese Kreisbögen entsprechend dem Kontaktschema von B berühren und die Eigenschaft der Kontakttreue vorliegt, wird wie in dem ausführlich diskutierten Falle des speziellen Kontaktschlitzbereiches mittels Hilfsabbildungen der Kontaktzipfel auf gestreckte, spiegelungsfähige Winkelräume nachgewiesen; die Existenz der Hilfsabbildungen ist durch den Riemannschen Abbildungssatz garantiert.

Ergänzt man gegebenenfalls jeden in der Bildebene erscheinenden Randkreisbogen zu einer vollständigen Kreislinie, so entsteht ein Kontaktkreisbereich $\tilde{\mathsf{B}}_0$. Wir müssen uns noch davon überzeugen, daß als Bild jeder Randlinie von B eine solche vollständige Kreislinie erscheint. Für eventuell vorkommende isolierte Randlinien, d. h. für solche, die in ihrer Gesamterstreckung kontaktfrei sind, ist die Behauptung ohne weiteres richtig. Ihre Richtigkeit für die übrigen Randlinien ist an das Erfülltsein der zweiten Kontaktbedingung gebunden. Man kann den besprochenen Sachverhalt auch so interpretieren, daß man feststellt, jede Zelle von $\tilde{\mathsf{B}}_0$ sei das Bild einer Zelle von B. In dieser Fassung ist nun die Behauptung sofort einzusehen, wenn man daran denkt, daß bei erfüllter zweiter Kontaktbedingung zu jedem Kontaktzipfel von B ein zweiter gehört, der von demselben Paare von Jordankurven begrenzt wird. Dementsprechend gehört mit jedem Kontaktzipfel von $\tilde{\mathsf{B}}_0$ auch der daran anstoßende Zipfel zum Bildbereiche von B. Dieser läßt somit keine Zelle von $\tilde{\mathsf{B}}_0$ unausgefüllt, d. h. er ist mit $\tilde{\mathsf{B}}_0$ identisch.

Zur Verdeutlichung der letzten Überlegung wird man die Kreisabbildung eines Kontaktbereiches untersuchen, bei dem die zweite Kontaktbedingung verletzt ist. Man denke etwa an drei endliche, gleichlange Schlitze, die im Nullpunkt unter Winkeln von 120^0 zusammenstoßen und als die vollständige Berandung eines solchen unzulässigen Kontaktbereiches aufgefaßt werden können. Unterwirft man die gewöhnlichen, dreifach zusammenhängenden Näherungsbereiche, die durch Löschen der Schlitze in einer Kreisscheibe von Radius ϱ um den Nullpunkt aus dem Kontaktbereiche entstehen, der Kreisabbildung, wobei man etwa Ruhnormierung im Unendlichen vorschreiben wird, so würde beim Grenzübergang $\varrho \to 0$ ein Kontaktkreisbereich entstehen, der von drei kongruenten, einander im Zyklus berührenden Kreisen begrenzt wird. Die Außenzelle dieses Bereiches allein ist das vollständige Bild des Originalbereiches; die Innenzelle bleibt unausgefüllt.

Wir nehmen unsere allgemeinen Betrachtungen wieder auf und stellen fest, daß der Nullpunkt der $\tilde{\zeta}_0$-Ebene jedenfalls nicht zum Bildbereich $\tilde{\mathsf{B}}_0$ von B gehören kann. Die

Grenzfunktion ist also nullstellenfrei, so daß die Folge der ursprünglichen Näherungsfunktionen

$$\zeta_{\varrho j}(z) = \frac{1}{\tilde{\zeta}_{\varrho j}(z)}$$

ebenfalls innerhalb B konvergiert, und zwar gegen die dort eindeutige und reguläre Funktion

$$\zeta(z) = \frac{1}{\tilde{\zeta}_0(z)}.$$

Sie vermittelt eine Abbildung von B auf einen schlichten Kontaktkreisbereich B, die allen in der Aufgabe gestellten Anforderungen genügt. Damit ist die Existenz einer Lösung unserer Abbildungsaufgabe in allen Teilen bewiesen.

Darüber hinaus ergibt sich ohne Benutzung eines Unitätssatzes die zweifach periodische Struktur des Bildbereiches. Es steht nämlich jetzt fest, daß die zu den Näherungsbildbereichen $\mathsf{B}_{\varrho j}$ gehörigen, erzeugenden Verschiebungsgrößen

$$2\omega_{\varrho j} = \zeta_{\varrho j}(z_0 + 2\omega), \quad 2\omega'_{\varrho j} = \zeta_{\varrho j}(z_0 + 2\omega')$$

beziehungsweise gegen zwei Größen $2\omega_0$ und $2\omega'_0$ konvergieren, die weder gleich Null sein noch ein reelles Verhältnis haben können, weil die Näherungsbilder der Grundzelle je eine Kreisscheibe $|\zeta_{\varrho j}| \leqq \frac{r}{10}$ bedecken, die Näherungsbilder eines Fundamentalbereiches also einen positiven Mindestflächeninhalt haben. Demzufolge gewinnt man ohne Schwierigkeit aus den Homomorphismen der Näherungsfunktionen entsprechende Homomorphismen für die Grenzfunktion.

5. Der Unitätssatz.

Wir haben noch die zu unserem Kreisnormierungsproblem gehörige Unitätsfrage zu behandeln. Zur Konstruktion einer Kreisnormierungsabbildung haben wir den abzubildenden Kontaktbereich B durch gewöhnliche, zweifach periodische Näherungsbereiche approximiert. Dabei hat sich zwangsläufig ein zweifach periodisches Grenzbild eingestellt. Bei der ursprünglichen Auffassung unserer Bereiche als solcher auf einer elliptischen Raumform erscheint dieses Vorgehen als das einzige naturgemäße. Die entsprechende Unitätsfrage lautet: Kann man einen gegebenen, zweifach periodischen Kontaktkreisbereich anders als durch eine Ähnlichkeitstransformation auf einen zweiten, zweifach periodischen Kontaktkreisbereich konform und kontakttreu abbilden? Die Frage ist zu verneinen. Es bleibt aber die Möglichkeit, einen Kontaktkreisbereich *ohne* zweifach periodische Struktur zu finden, der aus dem gegebenen Bereich durch eine nicht triviale, das heißt hier: durch eine nicht lineare Transformation hervorgeht.

Wir werden ohne großen Mehraufwand die darauf bezügliche schärfere und wegen ihres abschließenden Charakters vielleicht doch befriedigendere Fassung des Unitätssatzes beweisen können:

Unitätssatz. *Jede eineindeutige, konforme und kontakttreue Abbildung eines schlichten, zweifach periodischen Kontaktkreisbereiches* B *auf einen zweiten schlichten Kontaktkreisbereich* $\tilde{\mathsf{B}}$ *wird durch eine lineare Transformation bewirkt.*

Der Satz besagt unter anderem, daß jeder Bildbereich $\tilde{\mathsf{B}}$ nur eine punktförmige Häufungsrandkomponente besitzt — diese Tatsache bildet eine wesentliche Etappe des nachfolgenden Beweises — und, falls man den Häufungspunkt ins Unendliche verlegt, dieselbe zweifach periodische Struktur aufweist wie der Originalbereich B. Bezüglich des im vorigen Abschnitt auseinandergesetzten Konstruktionsverfahrens ergibt sich die Unabhängigkeit der Grenzfunktion von den verwendeten Näherungsbereichen und von der

Auswahl der konvergenten Funktionenfolge bei gleichbleibender Normierungsvorschrift. Man kann dies durch die im Sinne gleichmäßiger Konvergenz innerhalb B zu verstehende Limesrelation $\lim\limits_{\varrho \to 0} \zeta_\varrho(z) = \zeta(z)$ zum Ausdruck bringen.

Die anzuwendende Beweismethodik ist im Prinzip jetzt die gleiche wie im ersten Abschnitte. Es sollen daher nur die abzuändernden Schlüsse im einzelnen ausgeführt werden, während für die übrigen eine mehr andeutende Darstellung genügen wird.

Wir nehmen die Existenz einer Abbildung mit den im Unitätssatze genannten Eigenschaften an und transformieren in einem vorbereitenden Schritte durch eine lineare Abbildung einander entsprechende innere Punkte von B und $\tilde{\mathsf{B}}$ nach Unendlich. Die Abbildungsfunktion, durch welche die modifizierten Bereiche B' und $\tilde{\mathsf{B}}'$ aufeinander bezogen sind, hat dann im Unendlichen ein übersichtliches, polartiges Verhalten.

Indem wir wesentlich von der Eigenschaft der Kontakttreue Gebrauch machen, können wir uns die Abbildungsfunktion durch Spiegelung an den jeweiligen freien Randkreisen unbeschränkt fortgesetzt denken. Die entstehenden Erweiterungsbereiche von B' wollen wir als endliche bezeichnen, wenn die Anzahl der angelagerten Spiegelexemplare von B' endlich ist. Wir beabsichtigen, für die Abbildungsfunktion in einer irgendwie ausgewählten Zelle des aus B' und sämtlichen Spiegelexemplaren bestehenden, unendlichen Erweiterungsbereiches eine Cauchysche Integraldarstellung anzugeben.

Dazu hat man zunächst einen endlichen Erweiterungsbereich B'_N von B' zu wählen, der die betrachtete Zelle enthält. Jede der den Bereich B'_N bildenden Reproduktionen von B' besitzt einen Häufungspunkt von freien Randkreisen. Diese Häufungspunkte müssen durch passende, geschlossene Linien vom Bereiche B'_N isoliert werden. Man stelle sich vor, daß die Hilfslinien außer eventuellen freien Randkreisbögen nur innere Punkte von B'_N enthalten.

Zu dem Cauchyschen Integral über den Rand der ausgewählten Zelle, das unsere Abbildungsfunktion dort darstellt, werden nun entsprechende Integrale über die Ränder der übrigen Zellen von B'_N hinzugefügt, wobei jedoch nur diejenigen endlich vielen Zellen und Zellenteile zu berücksichtigen sind, die außerhalb der Hilfslinien liegen; der Rand der Außenzelle möge zuvor durch eine weit außen liegende, den Unendlichpunkt absondernde Kreislinie K_0 ergänzt werden. Die Orientierung der Integrationswege hat durchweg so zu geschehen, daß der umlaufene Bereich zur Linken liegt. Die Störung der Regularität unserer Funktion in den Kontaktzipfeln ist ohne Einfluß auf die Anwendbarkeit der Integraldarstellung, da die Funktion jedenfalls stetig bleibt. Die neu hinzugefügten Integrale haben sämtlich den Wert Null, die Summe aller genannten Integrale stellt daher ebenfalls die Abbildungsfunktion in der ausgewählten Zelle dar.

Man kann nun aber diese Summe auch auffassen als Summe von Cauchyschen Integralen über K_0, über die außerhalb der Hilfslinien gelegenen oder von außen an diese Linien anstoßenden freien Randkreise von B'_N und über die Hilfslinien selbst. Dadurch wird ersichtlich, daß die Integralsumme die Abbildungsfunktion nicht nur in der ausgewählten Zelle, sondern auch in jedem anderen Punkte von B'_N darstellt, der innerhalb K_0 und außerhalb der Hilfslinien liegt.

Die Summe der Integrale über die freien Kreisränder und die Hilfslinien ist von der Wahl dieser Linien unabhängig. Diese Willkür wird uns die Möglichkeit geben, die Integralsumme betragsmäßig durch beliebig kleine, positive Größen zu majorisieren und so ihr Verschwinden zu erkennen. Damit ist dann erwiesen, daß die einzelnen regulären Teile der Abbildungsfunktion im ganzen Innengebiete des großen Kreises K_0 allein durch das über diesen Kreis erstreckte Integral dargestellt werden. Sie sind folglich Teile einer bis auf einen Pol erster Ordnung im Unendlichen regulären, d. h. einer ganzen linearen

Funktion. Die angenommene Abbildung des Ausgangsbereiches B auf $\tilde{B}$ ist dann ebenfalls eine lineare Transformation, wie wir behauptet hatten.

Zur Durchführung der Integralabschätzung haben wir im wesentlichen zwei Feststellungen zu erbringen:

1) Es gibt in B′ geschlossene, sich nicht überschneidende Linien Λ' beliebig kleiner Länge, die nur innere Punkte oder Randkreisbögen enthalten, die Häufungsrandkomponente von B′ umschließen und Bildlinien $\tilde{\Lambda}'$ mit beliebig kleinem Durchmesser haben.

2) Es gibt endliche Erweiterungsbereiche von B′, bei denen die Summe der Flächeninhalte der freien Randkreise und auch die Summe der Flächeninhalte der zugehörigen Bildkreise beliebig klein werden.

Sind diese beiden Tatsachen gesichert, so kann man durch die auf S. 106 ff. ausgeführten Schlüsse den Unitätsbeweis ohne weitere Schwierigkeiten zu Ende führen.

Die Konstruktion der Hilfslinien Λ' bzw. der ihnen entsprechenden Linien Λ im zweifach periodischen Ausgangsbereich B, die aufs engste zusammenhängt mit der Erkenntnis des Punktcharakters der Häufungsrandkomponenten in $\tilde{B}$ und $\tilde{B}'$, läuft parallel mit der entsprechenden Konstruktion für gewöhnliche Bereiche (vgl. S. 106). Man überlagere den Bereich B mit einem seiner Parallelogrammstruktur entsprechenden, geradlinigen Gitter, wobei die Gitterpunkte innere Punkte von B sein mögen und die Gitterlinien keinen Kontaktpunkt treffen sollen; schließlich soll das gemeinsame Original der Unendlichpunkte von B′ und $\tilde{B}'$ im Innern eines der Parallelogramme (*Grundparallelogramm* Π) liegen.

Durch die Gitterlinien werden im allgemeinen gewisse Randkreise von B getroffen werden, selbstverständlich jeder einzelne nur durch eine generell angebbare Höchstzahl M von Geraden. Die außerhalb B gelegenen Randstücke des Grundparallelogramms denken wir uns ersetzt durch die zugehörigen, außerhalb Π gelegenen Kreisbögen mit denselben Endpunkten. Es entsteht eine geschlossene Linie Λ^1, die sich nicht selbst überschneidet und das Parallelogramm Π umschließt. Es stört uns nicht weiter, daß die in Λ^1 enthaltenen Kreisbögen einander teilweise berühren können. Jedem der geradlinigen Teilstücke von Λ^1 wird ein angrenzendes Flächenstück zugeordnet, nämlich ein zu B gehöriger, schmaler Saum, der in dem jeweiligen, an Π angrenzenden Parallelogramm liegt und keinen Kontaktzipfel enthält.

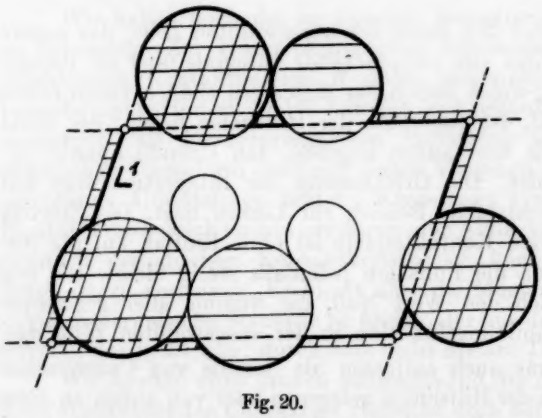


Fig. 20.

Wie früher gewinnen wir durch kongruente Verlagerung aus den vier von Gitterpunkt zu Gitterpunkt verlaufenden Teilen von Λ^1 weitere geschlossene Linien $\Lambda^2, \ldots, \Lambda^n, \ldots$, welche rahmenförmig um Π herum aufgebaute Komplexe von $(2 \cdot 2 - 1)^2, \ldots, (2n - 1)^2, \ldots$ Parallelogrammen umschließen (vgl. Fig. 2).

Die bei der Übertragung auf den Bereich $\tilde{B}'$ erscheinenden Bildlinien $\tilde{\Lambda}'^n$ werden stückweise mit angrenzenden Flächenstücken versehen: den kreisbogenförmigen Linienstücken werden die zugehörigen Kreisflächen zugeordnet, während im übrigen die Bilder der Flächensäume in B verwendet werden. Die zuletzt genannten Flächenstücke sind

paarweise punktfremd; dagegen können die Kreisflächen mehrfach bedeckt erscheinen. Die Bedeckungszahlen bleiben jedoch unterhalb der vorn erwähnten Schranke M.

Da der Unendlichpunkt innerer Punkt von $\tilde{\mathsf{B}}'$ ist, steht in der Bildebene nur das Innengebiet eines festen Kreises für die zugeordneten Flächenstücke zur Verfügung. Die Summe der Flächeninhalte konvergiert demnach. Das gleiche gilt von der Quadratsumme der Längen der Bildlinienstücke, da sich die zweite Summe von der ersten gliedweise nur durch beschränkte Faktoren unterscheidet. Letzteres ist für die Kreisbögen ohne weiters klar, für die übrigen Linienstücke folgt es aus der Bemerkung, daß die Flächensäume in B, da sie nicht an die Kontaktpunkte heranreichen, bei der Übertragung auf $\tilde{\mathsf{B}}'$ nur einheitlich abschätzbare Verzerrungen erfahren können. Durch elementare Schlüsse (vgl. S. 104) ergibt sich nunmehr, daß unter den Bildlinien $\tilde{\Lambda}'^n$ solche von beliebig kleiner Länge, also auch von beliebig kleinem Durchmesser erscheinen müssen.

Schließlich werden bei der linearen Transformation, die B in B' überführt, die aus den Λ^n entstehenden Linien Λ'^n beliebig kurz. Die Längen der Λ^n sind nämlich proportional zu n, während die längs Λ^n maßgebenden linearen Vergrößerungsverhältnisse in der Form $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ angegeben werden können. Die Linien Λ'^n haben also alle geforderten Eigenschaften.

Wir erkennen damit insbesondere, daß die Bereiche $\tilde{\mathsf{B}}$ und $\tilde{\mathsf{B}}'$ je nur eine punktförmige Häufungsrandkomponente besitzen können, da selbstverständlich die $\tilde{\Lambda}'^n$ die Häufungsrandkomponente von $\tilde{\mathsf{B}}'$ umschließen.

Als Vorbemerkung zur Erledigung des zweiten Programmpunktes — Konstruktion eines endlichen Erweiterungsbereiches B'_N von B' mit den oben genannten Eigenschaften — stellen wir fest, daß die Flächensumme der Randkreise von B' und auch die Flächensumme der freien Randkreise eines jeden durch Anfügung von Spiegelbildern erzeugten, endlichen oder unendlichen Erweiterungsbereiches von B' zunächst einmal überhaupt konvergiert, da diese Kreise jeweils getrennt und innerhalb eines festen Kreises liegen. Der Gesamtflächeninhalt der freien Randkreise verkleinert sich bei jeder Erweiterung. Das gleiche gilt von $\tilde{\mathsf{B}}'$ und seinen Erweiterungsbereichen.

Wir gehen aus vom Bereiche B' selbst, den wir in diesem Zusammenhange auch mit B'_0 bezeichnen wollen. Wegen der Konvergenz der Randkreisflächensumme kann man endlich viele Randkreise (*Hauptteil* H_0) so auswählen, daß der Gesamtflächeninhalt der übrigbleibenden, des *Restes* R_0, unterhalb ε liegt ($\varepsilon > 0$, beliebig). Wir schreiben $|R_0| < \varepsilon$. Nun wird in jeden Kreis des Hauptteils H_0 ein Spiegelexemplar von B' eingelagert. B'_1 sei der entstehende endliche Erweiterungsbereich von B'. Die gegenüber B'_0 neu erscheinenden freien Randkreise werden wieder in einen endlichen Hauptteil H_1 und einen Rest R_1 aufgeteilt, wobei jetzt $|R_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ gelten soll. Der Gesamtflächeninhalt f_1 der freien Randkreise von B'_1 erscheint gemäß

$$f_1 = |H_1| + |R_1| + |R_0|$$

zerlegt. Durch Einlagerung je endlich vieler Spiegelexemplare von B' in die zu H_1 gehörigen Kreise gewinnt man den endlichen Erweiterungsbereich B'_2. Die Menge der gegenüber B'_1 neu auftretenden Randkreise zerfällt in den endlichen Hauptteil H_2 und den Rest R_2 mit der Eigenschaft $|R_2| < \frac{\varepsilon}{4}$, der gesamte Flächeninhalt aller Randkreise in die Bestandteile

$$f_2 = |H_2| + |R_2| + |R_1| + |R_0|.$$

Allgemein soll für $n \geqq 2$ der Bereich B'_n aus B'_{n-1} durch Einlagern je endlich vieler Spiegelexemplare von B' in die endlich vielen zu H_{n-1} gehörigen Kreise entstehen und die Auf-

teilung der dabei neu erscheinenden Randkreise in einen endlichen Hauptteil H_n und den Rest R_n so vorgenommen werden, daß $|R_n| < \frac{\varepsilon}{2^n}$ gilt. B'_n ist somit ein endlicher Erweiterungsbereich von B'_n und die Flächensumme aller freien Randkreise durch

$$f_n = |H_n| + \sum_{\nu=0}^{n} |R_\nu|$$

gegeben.

Es wird uns gelingen, den Prozeß der Einlagerung endlich vieler Spiegelbilder von B' in die Kreise des Hauptteils H_{n-1} jeweils so zu leiten, daß der Gesamtflächeninhalt der neu entstehenden freien Randkreise einen angebbaren Bruchteil $q\,|H_{n-1}|$ des Flächeninhaltes der Kreise, in die eingelagert wird, nicht übertrifft. Der Gewinnung einer entsprechenden, nur von B abhängigen *Konfigurationskonstanten* $q < 1$ sind die folgenden Betrachtungen gewidmet.

Die Existenz der q-Größe einstweilen voraussetzend, können wir die triviale Ungleichheit $|H_n| < |H_{n-1}|$ durch die schärfere

$$|H_n| < q\,|H_{n-1}| \qquad (n \geqq 2)$$

ersetzen und gewinnen die Abschätzung

$$f_n < q^{n-1}\,|H_1| + \sum_{\nu=0}^{n} |R_\nu| < q^{n-1}\,|H_n| + \varepsilon \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{2^\nu} < q^{n-1}\,|H_1| + 2\varepsilon.$$

Wir sind dann sicher, daß unser Vorgehen schließlich zu einem endlichen Erweiterungsbereiche B'_N führt, dessen freie Randlinien insgesamt einen beliebig kleinen Flächeninhalt umschließen. Wir werden schließlich dafür sorgen, daß das allmähliche Zusammenschrumpfen der Randkreisflächensumme beim Erweiterungsprozeß auch in der Ebene des Bildbereiches $\tilde{\mathsf{B}}'$ durch die genannte q-Größe reguliert wird. Damit sind dann alle Erfordernisse befriedigt, und der Unitätsbeweis kann als abgeschlossen gelten.

Das wesentliche, noch zu gewinnende Resultat fassen wir in einem selbständigen Satze zusammen:

Satz. *Vorgelegt sei ein schlichter Kontaktkreisbereich $\mathfrak{B}$ mit endlich oder unendlich vielen Randkreisen, der ganz in einem Kreise K liegt und diesen Kreis selbst als Randlinie besitzt. In einen hinreichend schmalen, von innen an K angesetzten Kreisring sollen nur endlich viele Randkreise eindringen; das Auftreten endlich vieler K berührender Kreise (Berührungskreise) ist damit zugelassen.*

Wir betrachten eine beliebige eineindeutige, konforme und kontakttreue Abbildung von $\mathfrak{B}$ auf einen zweiten schlichten, in einem Kreise K' liegenden Kontaktkreisbereich $\mathfrak{B}'$; die Außenkreise K und K' seien dabei einander zugeordnet. Wir bezeichnen mit k'_j bzw. $|k'_j|$ die Berührungskreise im Bilde bzw. ihre Flächeninhalte; $|\mathfrak{B}'|$ sei der innere Jordaninhalt von $\mathfrak{B}'$, $|K'|$ der Flächeninhalt von K'. Es gilt dann eine Ungleichheit

$$\frac{|\mathfrak{B}'|}{|K'| - \operatorname{Max}|k'_j|} \geqq \alpha > 0$$

mit einer nur von $\mathfrak{B}$ abhängigen Konstanten $\alpha < 1$.

Falls keine Berührungskreise auftreten, ist $\operatorname{Max}|k'_j| = 0$ zu setzen. Es erscheint bemerkenswert, daß man über die innerhalb K auftretenden Häufungsphänomene der Randkreise von $\mathfrak{B}$ keinerlei Voraussetzungen zu machen braucht.

Beweis. Wir betrachten die Gesamtheit aller Bildbereiche $\mathfrak{B}'$, die unter den genannten Voraussetzungen auftreten können und deren Außenkreis der Einheitskreis ist; letzteres ist offenbar keine Einschränkung der Allgemeinheit. Im Sinne eines indirekten Beweises nehmen wir an, die untere Grenze der betrachteten Quotienten sei Null.

Wir können dann eine Folge von Bereichen $\mathfrak{B}'$ so auswählen, daß die zugehörigen Quotienten und folglich auch die Inhalte $|\mathfrak{B}'|$ gegen Null konvergieren. Ferner dürfen

wir annehmen, daß die zugehörigen Abbildungsfunktionen innerhalb $\mathfrak{B}$ gleichmäßig konvergieren (*Häufungsprinzip*, eventuell Bildung einer Diagonalfolge).

Die Grenzfunktion darf offenbar keinen Teil von $\mathfrak{B}$ gebietsmäßig abbilden und muß folglich in jeder Zelle von $\mathfrak{B}$ konstant sein. Die gleichmäßige Konvergenz gegen Konstanten erstreckt sich nach geläufigen Schlüssen auch auf jeden abgeschlossenen, kontaktfreien Teilbogen von K.

In $\mathfrak{B}$ konstruieren wir eine einfach geschlossene Linie L. Sie besteht aus Peripheriebögen auf K, die beiderseits fast bis an die Kontakte heranreichen und in unmittelbarer Nähe jeder auf K liegenden Kontaktstelle verbunden sind durch je einen kleinen, den Kontakt durchlaufenden Bogen des betreffenden Berührungskreises und je zwei kurze Linienstücke, welche den Berührungskreisbogen mit den benachbarten Bögen auf K verbinden. Sind keine Kontakte auf K vorhanden, so falle L mit K zusammen. In jedem Falle gehören alle Punkte innerhalb K und außerhalb L zu $\mathfrak{B}$. Diese Eigenschaft überträgt sich sinngemäß auf den veränderlich vorzustellenden Bildbereich $\mathfrak{B}'$ und hat unmittelbar zur Folge, daß die Länge der Bildlinie L' nicht angebbar unterhalb 2π, der Länge von K', bleiben kann.

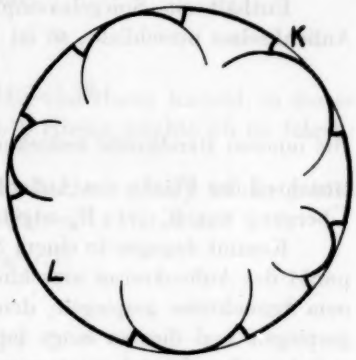


Fig. 21.

Andererseits werden aber die einzelnen Teilstücke von L' beliebig kurz (Konstanz der Grenzfunktion in jeder Zelle von $\mathfrak{B}$), eventuell mit Ausnahme der zu L' gehörigen Berührungskreisbögen. Ist kein solcher vorhanden, so haben wir bereits einen Widerspruch. Sonst muß einer der Berührungskreise im Bilde eine positive Mindestgröße behalten; wir bezeichnen einen solchen Kreis mit k'.

Aus der Linie L' denke man sich nun den zu k' gehörigen Kreisbogen herausgenommen, so daß eine offene Linie L_0' übrigbleibt. Wegen des unbeschränkten Zusammenschrumpfens derjenigen Teile von L_0', die die Berührungskreise miteinander verbinden, kommen diese Kreise nacheinander jeweils in unmittelbare Nähe der beiden nicht schrumpfenden Kreise K' und k' und müssen dabei beliebig klein werden (vgl. S. 124). Die Linie L_0' verkürzt sich also unbeschränkt. Daher muß der wesentliche Bestandteil von L' schließlich von dem zu k' gehörigen Berührungskreisbogen gebildet werden, dessen Länge somit gegen 2π strebt: k' schmiegt sich unbegrenzt an den Außenkreis K' an, und es ist $\operatorname{Max} |k_j'| = |k'|$.

Der Bereich $\mathfrak{B}'$ füllt die von K' und k' gebildete Sichel aus bis auf eine Punktmenge, die von L_0' und dem ebenfalls kurz werdenden Komplementbogen des Berührungskreisbogens auf k' umschlossen wird. Die Punktmenge kann also in einen festen, von zwei Halbgeraden durch den Berührungspunkt der Sichelkreise begrenzten Winkelraum eingeschlossen werden, der beliebig schmal wählbar ist. Der Flächeninhalt der außerhalb des Winkelraumes gelegenen Sichelteile steht zur gesamten Sichelfläche in einem Verhältnis, das vom Radius des inneren Sichelkreises nicht abhängt; man erkennt das etwa, wenn man durch homothetische Reproduktionen der Sichel den ganzen Kreis K' ausfüllt. Daraus ergibt sich, daß der Quotient

$$\frac{|\mathfrak{B}'|}{|K'| - |k'|}$$

gegen Eins konvergiert. Dies ist der gewünschte Widerspruch.

Das Zusammenschrumpfen des Bildbereiches $\mathfrak{B}'$ ist, wie man sieht, nur in der Weise denkbar, daß einer der Berührungskreise allmählich das ganze Innengebiet von K' ausfüllt.

Wir haben damit das Mittel in der Hand, die gewünschte Konfigurationskonstante q in einfacher Weise zu gewinnen. Man fasse in dem zweifach periodischen Bereiche B ein vollständiges Repräsentantensystem der Randkreise ins Auge. In jeden dieser endlich vielen Kreise wird ein Spiegelexemplar von B' eingelagert. Jedes Spiegelexemplar von B' oder $\tilde{\mathsf{B}}'$ ist zu einem dieser Grundbereiche konform äquivalent mit der Maßgabe, daß Außenkreis in Außenkreis übergeht. Wir bringen nun auf diese Bereiche den eben bewiesenen Satz zur Anwendung. Die Konstante α sei so gewählt, daß sie gleichzeitig für jeden der Grundbereiche maßgebend ist.

Enthält ein Spiegelexemplar keinen Berührungskreis, der den Mittelpunkt des Außenkreises umschließt, so ist in der Bezeichnungsweise unseres Satzes

$$|\mathfrak{B}'| \geqq \alpha(|K'| - \operatorname{Max}|k_j'|) \geqq \frac{3}{4}\alpha\,|K'|.$$

Die inneren Randkreise bedecken also höchstens einen durch $1 - \frac{3}{4}\alpha$ beschreibbaren Bruchteil der Fläche des Außenkreises. Dieses Exemplar kann dann ohne weiteres beim Übergang von B'_{n-1} zu B'_n angelagert werden.

Kommt dagegen in einem Spiegelexemplar ein Berührungskreis vor, der den Mittelpunkt des Außenkreises umschließt (*Innenkreis*), so denke man sich den Bereich an seinem Innenkreise gespiegelt, den entstehenden Bereich abermals an seinem Innenkreise gespiegelt und dies so lange fortgesetzt, bis der innerste Kreis, der sich ja allmählich auf den allen Innenkreisen gemeinsamen Berührungspunkt zusammenzieht, den Mittelpunkt des Außenkreises nicht mehr umschließt. Wir bemerken beiläufig, daß das Radienverhältnis benachbarter Innenkreise hierbei monoton zunimmt; bei unbeschränktem Weiterspiegeln würde es gegen Eins konvergieren. Jedenfalls ist auf die Vereinigung der endlich vielen angelagerten Spiegelexemplare wieder unser Satz mit der gleichen Konstanten α anwendbar, und wir erhalten für die Flächensumme der inneren Randkreise die gleiche obere Schranke $(1 - \frac{3}{4}\alpha)\,|K'|$ wie im vorangegangenen Falle. Beim Übergang von B'_{n-1} zu B'_n werden die genannten Spiegelbilder von B' mit einem Schlage angefügt. Die Zahl $1 - \frac{2}{4}\alpha$ ist die gesuchte q-Größe.

Abschließend sei bemerkt, daß man wohl hoffen darf, mit den hier zur Anwendung gebrachten Methoden auch Kreisnormierungs- und Kontaktprobleme auf anderen, eventuell sogar singularitätenbehafteten (*uniformisablen*) Raumformen höheren Geschlechts erfolgreich in Angriff nehmen zu können. Besonders interessant dürften die bei der Kreisnormierung zu erwartenden Deformationen der tragenden Raumformen bzw. der ihnen entsprechenden Fundamentalgruppen sein.

Literaturnachweis.

[1] *P. Koebe*, Kontaktprobleme der konformen Abbildung, Ber. ü. d. Verhdlg. d. Sächs. Akad. d. Wiss. **88** (1936), 141—164.

[2] *P. Koebe*, Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung (VI), Math. Zeitschr. **7** (1920), 235—301.

[3] *P. Koebe*, Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven (II), Math. Ann. **69** (1910), 1—81.

[4] *P. Koebe*, Allgemeine Theorie der Riemannschen Mannigfaltigkeiten (Konforme Abbildung und Uniformisierung), Acta math. **50** (1927), 31—157.

[5] *P. Koebe*, Riemannsche Mannigfaltigkeiten und nichteuklidische Raumformen (1. und 3. Mitteilung), Sitzgsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. (phys.-math. Klasse) 1927, 164—196 und 1928, 385—442.

[6] *H. Denneberg*, Konforme Abbildung einer Klasse unendlich vielfach zusammenhängender schlichter Bereiche auf Kreisbereiche, Ber. ü. d. Verhdlg. d. Sächs. Akad. d. Wiss. **84** (1932), 331—352.

Eingegangen 28. April 1955.

Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn Kanold.

Von *Peter Scherk* in Saskatoon.

Vor kurzem erschien in dieser Zeitschrift eine Arbeit von Herrn Kanold, in der er die natürlichen Dichten einiger Zahlenmengen bestimmte[1]). Hieran möchte ich im folgenden einige Bemerkungen anschließen.

Kleine lateinische Buchstaben bezeichnen natürliche Zahlen. $(Q(a))^2$ ist der größte quadratische Teiler von a. Die Zahlen d und f seien fest; $Q(f) = 1$. Wir setzen

$$C_f(N) = \sum_{\substack{c \leq N \\ (c,f)=1 \\ Q(c)=1}} 1 = \sum_{\substack{c \leq N \\ (c,f)=1}} \mu^2(c) = \sum_{c \leq N} \mu^2(cf); \tag{1}$$

also $C_1(N)$ = Anzahl der quadratfreien Zahlen $\leq N$ und[2])

$$\lim_{N \to \infty} \frac{C_1(N)}{N} = \frac{6}{\pi^2}. \tag{2}$$

Ferner sei

$$T_{f,d}(N) = \sum_{\substack{a \leq N \\ (a,f)=1 \\ Q(a)=d}} 1 \text{ und } A_{f,d}(N) = \sum_{\substack{a \leq N \\ (a,f)=1 \\ Q(a) \geq d}} 1.$$

Unter Benutzung von (2) beweist Herr Kanold

$$\lim_{N \to \infty} \frac{A_{1,d}(N)}{N} = 1 - \frac{6}{\pi^2} \sum_{b=1}^{d-1} \frac{1}{b^2} \tag{3}$$

und leitet aus (3) und (2) ab

$$\lim_{N \to \infty} \frac{T_{1,d}(N)}{N} = \frac{6}{\pi^2 d^2}. \tag{4}$$

Schließlich verallgemeinert er (4) und beweist unabhängig von (3) und (4)

$$\lim_{N \to \infty} \frac{T_{f,d}(N)}{N} = \frac{6}{\pi^2 d^2} \prod_{p \mid f} \frac{p}{p+1}, \quad \text{falls } (d, f) = 1. \tag{5}$$

Wir möchten im Vorbeigehen bemerken, daß (4) ein Korollar von (2) ist, und daß (3) auf wenigen Zeilen aus (4) folgt. In der Tat ist

$$T_{1,d}(N) = \sum_{\substack{a \leq N \\ Q(a)=d}} 1 = \sum_{\substack{cd^2 \leq N \\ Q(cd^2)=d}} 1 = \sum_{\substack{c \leq \frac{N}{d^2} \\ Q(c)=1}} 1 = C_1\left(\frac{N}{d^2}\right) \tag{6}$$

und daher

$$\lim_{N \to \infty} \frac{T_{1,d}(N)}{N} = \lim_{N \to \infty} \frac{C_1\left(\frac{N}{d^2}\right)}{\frac{N}{d^2}} \cdot \frac{1}{d^2} = \frac{6}{\pi^2} \cdot \frac{1}{d^2}.$$

---

[1]) *H. J. Kanold*, Über die Dichte von gewissen Zahlenmengen, J. f. reine u. angew. Math. **193**, 250—252 (1954).

[2]) *E. Landau*, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Leipzig 1909, S. 580ff.

Weiter ist

$$(7)\qquad A_{1,d}(N) = \sum_{\substack{a \leq N \\ Q(a) \geq d}} 1 = \sum_{a \leq N} 1 - \sum_{\substack{a \leq N \\ Q(a) < d}} 1 = N - \sum_{b=1}^{d-1} \sum_{\substack{a \leq N \\ Q(a) = b}} 1 = N - \sum_{b=1}^{d-1} T_{1,b}(N),$$

also

$$\lim_{N \to \infty} \frac{A_{1,d}(N)}{N} = 1 - \sum_{b=1}^{d-1} \lim_{N \to \infty} \frac{T_{1,b}(N)}{N} = 1 - \sum_{b=1}^{d-1} \frac{6}{\pi^2} \cdot \frac{1}{b^2}.$$

In dieser Note beweisen wir

$$(8)\qquad \lim_{N \to \infty} \frac{C_f(N)}{N} = \frac{6}{\pi^2} \prod_{p \mid f} \frac{p}{p+1}$$

und leiten hieraus (5) *und eine Verallgemeinerung von* (3) *ab* [3]).

Nach (2) ist (8) richtig für $f = 1$. Sei (8) für f bewiesen und sei q eine zu f teilerfremde Primzahl. Dann ist also qf quadratfrei, und wir erhalten aus (1)

$$\begin{aligned} C_{qf}(N) &= \sum_{\substack{c \leq N \\ (c, qf) = 1}} \mu^2(c) = \sum_{\substack{c \leq N \\ (c, f) = 1}} \mu^2(c) - \sum_{\substack{c \leq N \\ (c, f) = 1 \\ q \mid c}} \mu^2(c) \\ &= C_f(N) - \sum_{\substack{qb \leq N \\ (qb, f) = 1}} \mu^2(qb) \\ &= C_f(N) - \sum_{\substack{b \leq \frac{N}{q} \\ (b, f) = 1}} \mu^2(qb) \\ &= C_f(N) - \sum_{\substack{b \leq \frac{N}{q} \\ (b, qf) = 1}} \mu^2(b). \end{aligned}$$

Somit ist

$$C_{qf}(N) = C_f(N) - C_{qf}\left(\frac{N}{q}\right).$$

Wiederholte Anwendung dieser Formel ergibt

$$\begin{aligned} C_{qf}(N) &= C_f(N) - C_f\left(\frac{N}{q}\right) + C_{qf}\left(\frac{N}{q^2}\right) \\ &= \cdots \\ &= \sum_{\lambda=0}^{s} (-1)^\lambda C_f\left(\frac{N}{q^\lambda}\right) + (-1)^{s+1} C_{qf}\left(\frac{N}{q^{s+1}}\right); \; s = 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

Da $C_{qf}\left(\frac{N}{q^{s+1}}\right) \geq 0$, folgt hieraus

$$\sum_{\lambda=0}^{2t-1} (-1)^\lambda C_f\left(\frac{N}{q^\lambda}\right) \leq C_{qf}(N) \leq \sum_{\lambda=0}^{2t} (-1)^\lambda C_f\left(\frac{N}{q^\lambda}\right)$$

oder

$$(9)\qquad \sum_{\lambda=0}^{2t-1} \frac{(-1)^\lambda}{q^\lambda} \cdot \frac{C_f\left(\frac{N}{q^\lambda}\right)}{\frac{N}{q^\lambda}} \leq \frac{C_{qf}(N)}{N} \leq \sum_{\lambda=0}^{2t} \frac{(-1)^\lambda}{q^\lambda} \frac{C_f\left(\frac{N}{q^\lambda}\right)}{\frac{N}{q^\lambda}}; \; t = 1, 2, \ldots.$$

---

[3]) Herrn *Kanolds* Beweis von (5), insbesondere der seiner Formel (16), erscheint uns etwas knapp.

Nun ist auf Grund unserer Annahme bei festgehaltenem s

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{\lambda=0}^{s} \frac{(-1)^\lambda}{q^\lambda} \frac{C_f\left(\frac{N}{q^\lambda}\right)}{\frac{N}{q^\lambda}} = \sum_{\lambda=0}^{s} \frac{(-1)^\lambda}{q^\lambda} \lim_{N\to\infty} \frac{C_f\left(\frac{N}{q^\lambda}\right)}{\frac{N}{q^\lambda}}$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{s} \frac{(-1)^\lambda}{q^\lambda} \lim_{M\to\infty} \frac{C_f(M)}{M}$$

$$= \frac{1+(-1)^s \frac{1}{q^{s+1}}}{1+\frac{1}{q}} \cdot \frac{6}{\pi^2} \prod_{p|f} \frac{p}{p+1}.$$

Somit folgt aus (9)

$$\frac{6}{\pi^2} \frac{1-\frac{1}{q^{2t}}}{1+\frac{1}{q}} \prod_{p|f} \frac{p}{p+1} \leqq \liminf_{N\to\infty} \frac{C_{qf}(N)}{N}$$

$$\leqq \limsup_{N\to\infty} \frac{C_{qf}(N)}{N} \leqq \frac{6}{\pi^2} \frac{1-\frac{1}{q^{2t+1}}}{1+\frac{1}{q}} \prod_{p|f} \frac{p}{p+1}.$$

Dies gilt bei jeder Wahl von t. Grenzübergang ergibt

$$\lim_{N\to\infty} \frac{C_{qf}(N)}{N} = \frac{6}{\pi^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{q}} \cdot \prod_{p|f} \frac{p}{p+1} = \frac{6}{\pi^2} \prod_{p|qf} \frac{p}{p+1}.$$

Gilt also (8) für f, so auch für qf. Somit ergibt sich (8) mittels Induktion nach der Anzahl der Primfaktoren von f.

Aus (8) ergibt sich unmittelbar (5) nach dem Paradigma von (6); denn es ist

$$T_{f,d}(N) = \sum_{\substack{cd^2 \leqq N \\ (cd^2, f)=1 \\ Q(cd^2)=d}} 1 = \sum_{\substack{c \leqq \frac{N}{d^2} \\ (c,f)=1 \\ Q(c)=1}} 1 = C_f\left(\frac{N}{d^2}\right), \text{ falls } (f, d) = 1. \tag{9}$$

Ebenso ergibt sich analog zu (7)

$$A_{f,d}(N) = \sum_{\substack{a \leqq N \\ (a,f)=1}} 1 - \sum_{b=1}^{d-1} \sum_{\substack{a \leqq N \\ (a,f)=1 \\ Q(a)=b}} 1 = \sum_{\substack{a \leqq N \\ (a,f)=1}} 1 - \sum_{b=1}^{d-1} T_{f,b}(N). \tag{10}$$

Nun ist

$$\sum_{\substack{a \leqq N \\ (a,f)=1}} 1 \begin{cases} \geqq \sum\limits_{\substack{a \leqq \left[\frac{N}{f}\right] f \\ (a,f)=1}} 1 = \left[\frac{N}{f}\right] \varphi(f) > \left(\frac{N}{f} - 1\right) \varphi(f) \\ < \sum\limits_{\substack{a \leqq \left(\left[\frac{N}{f}\right]+1\right) f \\ (a,f)=1}} 1 = \left(\left[\frac{N}{f}\right] + 1\right) \varphi(f) \leqq \left(\frac{N}{f} + 1\right) \varphi(f), \end{cases}$$

daher

$$\left(\frac{1}{f}-\frac{1}{N}\right)\varphi(f) < \frac{1}{N}\sum_{\substack{a\leq N\\(a,f)=1}} 1 < \left(\frac{1}{f}+\frac{1}{N}\right)\varphi(f)$$

und

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{\substack{a\leq N\\(a,f)=1}} 1 = \frac{1}{f}\cdot\varphi(f) = \prod_{p\mid f}\left(1-\frac{1}{p}\right). \tag{11}$$

Da $T_{f,b}(N) = 0$ ist für $(b, f) > 1$, ergibt sich aus (5)

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{b=1}^{d-1} T_{f,b}(N) = \sum_{\substack{b=1\\(b,f)=1}}^{d-1}\lim_{N\to\infty}\frac{T_{f,b}(N)}{N}$$
$$= \sum_{\substack{b=1\\(b,f)=1}}^{d-1}\frac{6}{\pi^2 b^2}\prod_{p\mid f}\frac{p}{p+1}.$$

Aus (10), (11) und der letzten Formel ergibt sich schließlich die gesuchte Verallgemeinerung von (3):

$$\lim_{N\to\infty}\frac{A_{f,d}(N)}{N} = \prod_{p\mid f}\frac{p-1}{p} - \frac{6}{\pi^2}\cdot\prod_{p\mid f}\frac{p}{p+1}\cdot\sum_{\substack{b=1\\(b,f)=1}}^{d-1}\frac{1}{b^2}.$$

Anhang. Beweis von (2). Es ist

$$C_1(N) = \sum_{\substack{c\leq N\\Q(c)=1}} 1 = [N] - \sum_p\left[\frac{N}{p^2}\right] \pm \cdots$$
$$= \sum_n \mu(n)\left[\frac{N}{n^2}\right] = \sum_{n\leq\sqrt{N}}\mu(n)\left[\frac{N}{n^2}\right]$$
$$= \sum_{n\leq\sqrt{N}}\mu(n)\cdot\frac{N}{n^2} + R(N).$$

Hier ist

$$|R(N)| = \left|\sum_{n\leq\sqrt{N}}\mu(n)\left(\left[\frac{N}{n^2}\right]-\frac{N}{n^2}\right)\right| \leq \sum_{n\leq\sqrt{N}} 1 \leq \sqrt{N}.$$

Hieraus folgt

$$\lim_{N\to\infty}\frac{C_1(N)}{N} = \lim_{N\to\infty}\sum_{n\leq\sqrt{N}}\frac{\mu(n)}{n^2} + \lim_{n\to\infty}\frac{R(N)}{N}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^2} + 0 = \zeta^{-1}(2) = \frac{6}{\pi^2}.$$

Eingegangen 10. Mai 1955.

Anmerkung der Redaktion. Die Relation (8), die im Vorangehenden für den Fall eines quadratfreien f bewiesen wurde, gilt auch für nichtquadratfreies f. Ist nämlich $f = f'\cdot g$, wo f' den größten quadratfreien Faktor von f bedeutet, so folgt aus $p \mid f$ stets $p \mid f'$ (p Primzahl) und umgekehrt. Also sind die Bedingungen $(c, f) = 1$ und $(c, f') = 1$ äquivalent, und daher ist

$$C_f(N) = C_{f'}(N) \qquad (N = 1, 2, \ldots).$$

Die Struktur der stetigen Funktionen einer Veränderlichen. II.*)

Von *K. Bögel* in Ilmenau.

Fünfter Abschnitt.

Die einheitliche Konstruktion aller stetigen Funktionen.

§ 1. Einige Definitionen und Sätze.

Um zu der in der Einleitung erwähnten natürlichen Approximation zu gelangen, bringen wir zunächst einige Definitionen und Sätze (die man auch als Hilfssätze ansprechen könnte). Wir benötigen sie nur deshalb, weil wir auch Funktionen mit Linearitätsintervallen betrachten; die von solchen Funktionen verursachten Erschwerungen treten also hier besonders deutlich zutage.

Definition 21a. Ist M eine meßbare Menge und ist $\mu M \geqq \eta > 0$ (wobei μM ihr Maß bedeutet), so heiße M eine *η-Menge* (speziell: ein η-Ausschnitt, η-Intervall, η-Segment usw.).

Definition 21b. Konvergiert eine Intervallschachtelung $\{J_n\}$ nach einem η-Ausschnitt, so heiße sie eine *η-Schachtelung.*

Satz 52. *Eine Schachtelung $\{J_n\}$ ist dann und nur dann eine η-Schachtelung, wenn jedes der Intervalle J_n ein η-Intervall ist.*

Beweis. 1. Aus $J_n \geqq \bigcap_{n=0}^{\infty} J_n$ und $\mu \bigcap_{n=0}^{\infty} J_n \geqq \eta$ folgt $\mu J_n \geqq \eta$.

2. Aus $J_n \geqq J_{n+1}$ und $\mu J_n \geqq \eta$ für jeden Index n folgt $\mu \bigcap_{n=0}^{\infty} J_n \geqq \eta$.

Definition 21c. Genau die p ersten Intervalle einer Schachtelung $\{J_n\}$ seien η-Intervalle. Dann heiße sie eine *Schachtelung mit einem η-Anfang.* Die Zahl p nennen wir die *Länge des η-Anfanges.*

Satz 53. *Im Intervall J sei eine G_δ-Menge E gegeben, und es sei*

$$E = \bigcap_{n=0}^{\infty} E_n$$

eine ihrer kanonischen Darstellungen. Ferner sei $\eta > 0$ vorgegeben. Dann enthält die Folge $\{E_n\}$

a) *nur endlich viele η-Schachtelungen,*

b) *nur endlich viele verschiedene η-Anfänge.*

Setzt man die Anzahl der ersteren gleich m_1, die der letzteren gleich m_2, so ist

$$m_1 + m_2 \leqq \left[\frac{\mu J}{\eta}\right]. \tag{114}$$

*) Entgegen der Ankündigung in der Einleitung umfaßt Teil II dieser Arbeit nur den fünften Abschitt Der sechste Abschnitt erscheint als Teil III in Band 197 dieses Journals.

Beweis. Da alle Komponenten von E_n paarweise punktfremd sind, ist die Anzahl der η-Komponenten von E_n in der Tat höchstens gleich $\left[\frac{\mu J}{\eta}\right]$. Daraus folgen alle Behauptungen leicht.

Satz 54. *Unter den Voraussetzungen und Bezeichnungen des Satzes* 53 *seien*

$$\{J_{n,r}\} \quad (r = 1, 2, \ldots, m_1)$$

die in der Folge $\{E_n\}$ *enthaltenen* η*-Schachtelungen, und es sei*

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} J_{n,r} = J_r.$$

Außerdem sei $m(n)$ *die Anzahl der* η*-Komponenten der offenen Menge* E_n. *Dann existiert eine Zahl* $N(\eta) > 0$ *von der Beschaffenheit, daß für* $n > N(\eta)$ *stets* $m(n) = m_1$ *ist.*

Beweis. Unter den endlich vielen in der Folge $\{E_n\}$ enthaltenen verschiedenen endlichen η-Anfängen gibt es mindestens einen von größter Länge p. Für $n > p$ folgt daraus zunächst $m(n) \leqq m_1$.

Würde für alle Indizes $n > p$ die Ungleichung $m(n) < m_1$ gelten, so wäre die Anzahl der η-Schachtelungen kleiner als m_1, im Widerspruch zur Definition von m_1. Es existiert daher eine Zahl N' von der Beschaffenheit, daß für $n > N'$ die m_1 Intervalle $J_{n,r}$ paarweise punktfremd sind. Mit $N = \max(p, N')$ ist dann der Satz bewiesen.

Satz 55. *Die Funktion* $f(x)$ *sei in* $\bar{J}$ *stetig und in einem Intervall* $(c, d) \subset \bar{J}$ *linear. Außerdem sei* $\{J_n\} = \{(c_n, d_n)\}$ *eine Schachtelung mit dem Durchschnitt*

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} J_n = \langle c, d \rangle.$$

Ist dann $\varepsilon > 0$, *so existiert eine Zahl* $N(\varepsilon) > 0$ *von der Beschaffenheit, daß aus* $n > N(\varepsilon)$ *und* $x \in J_n$ *die Ungleichung*

$$|D(f; c_n, d_n; x)| < \varepsilon \tag{115}$$

folgt.

Beweis. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit der Funktion $f(x)$ in $\bar{J}$ existiert eine Zahl $\delta(\varepsilon) > 0$ derart, daß aus

$$|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon) \tag{116a}$$

stets

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{4} \tag{116b}$$

folgt. Setzen wir jetzt

$$\gamma = \operatorname{Min}\left[\delta(\varepsilon), \frac{\varepsilon}{4} \frac{d - c}{|f(d) - f(c)| + \frac{\varepsilon}{2}}\right], \tag{117}$$

so ist von einem Index $n = N$ an stets

$$0 \leqq c - c_n < \gamma; \quad 0 \leqq d_n - d < \gamma. \tag{118}$$

Wir behaupten, daß dieser Wert N die im Satz geforderten Eigenschaften besitzt. Es sei also $n > N$. Dann beweisen wir zunächst

$$|D(f; c_n, d_n; c| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{119a}$$

und

$$|D(f; c_n, d_n; d| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{119b}$$

Denn nach (116a) bis (118) ist

$$|f(c_n) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{4} \tag{120a}$$

$$|f(d_n) - f(d)| < \frac{\varepsilon}{4}, \tag{120b}$$

woraus wir, unter Beachtung von $d_n - c_n \geqq d - c$, in der Tat die Abschätzung

$$\begin{aligned} |D(f; c_n, d_n; c| &= \left| f(c_n) + (c - c_n) \frac{f(d_n) - f(c_n)}{d_n - c_n} - f(c) \right| \\ &\leqq |f(c_n) - f(c)| + |c - c_n| \frac{|f(d) - f(c)| + \frac{\varepsilon}{2}}{d - c} < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \tag{121}$$

erhalten. Damit ist (119a) bewiesen, und der Beweis von (119b) ist analog.

Aus (119a) und (120a) folgt

$$|L(f; c_n, d_n; c) - f(c_n)| < \frac{3}{4}\varepsilon; \tag{122a}$$

wegen (32b) ist somit

$$|L(f; c_n, d_n; c) - L(f; c_n, d_n; c_n)| < \frac{3}{4}\varepsilon; \tag{122b}$$

aus der Linearität von $L(f; c_n, d_n; x)$ folgt daher, daß für $x \in [c_n, c]$ stets

$$|L(f; c_n, d_n; x) - L(f; c_n, d_n; c_n)| = |L(f; c_n, d_n; x) - f(c_n)| < \frac{3}{4}\varepsilon \tag{123}$$

ist. Auf Grund von (116a) bis (118) ist aber

$$|f(x) - f(c_n)| < \frac{\varepsilon}{4},$$

hieraus und aus (123) folgt sodann

$$|L(f; c_n, d_n; x) - f(x)| = |D(f; c_n, d_n; x)| < \varepsilon,$$

womit (115) für $x \in [c_n, c]$ bewiesen ist, und der Beweis für $x \in [d, d_n]$ ist völlig analog.

Im Intervall (c, d) schließlich ist $D(f; c_n, d_n; x)$ linear, weil $L(f; c_n, d_n; x)$ und $f(x)$ linear sind. Die Werte von $D(f; c_n, d_n; x)$ in (c, d) liegen daher zwischen $D(f; c_n, d_n; c)$ und $D(f; c_n, d_n; d)$, sind also wegen (119a) und (119b) überall absolut kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$.

Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

§ 2. Natürliche Approximationen.

Wir gehen aus von den in § 9 des dritten Abschnittes vorgenommenen Entwicklungen. Wir verwenden die durch (107a) bis (108c) festgelegten Bezeichnungen, und legen somit die kanonische Summendarstellung (110) von $S(f, \bar{J})$ zugrunde.

Ist nun $f(x)$ in $\bar{J}$ stetig, so bilden wir eine Funktionenfolge $\{s_n(x)\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, die durch $f(x)$ und die Mengen $F_n(f, \bar{J})$ völlig bestimmt ist. Wir setzen

(124a) $s_n(x) = f(x)$, wenn $x \in F_n(f, \bar{J})$,

(124b) $s_n(x)$ in jeder Komponente von $B_n(f, J)$ linear.

Setzen wir noch

(125a) $$f_0(x) = s_0(x)$$

(125b) $$f_n(x) = s_n(x) - s_{n-1}(x), \text{ wenn } n \geqq 1 \text{ ist,}$$

so ist

(126) $$s_n(x) = \sum_{r=0}^{n} f_r(x).$$

Aus der Definition der Mengen $V_n(f, J)$ in (108b), der Definition der Funktionen $s_n(x)$ in (124a, b) und der Funktionen $f_n(x)$ in (125a, b) folgt

Satz 56. *Die Funktionen $f_n(x)$ haben für $n \geqq 1$ folgende Struktur: es ist*

(127a) $$f_n(x) = 0 \text{ für } x \in F_{n-1}(f, J)$$

(127b) $$f_n(x) = f(x) - f_{n-1}(x) \text{ für } x \in V_n(f, J)$$

(127c) $f_n(x)$ *linear in jeder Komponente von* B_n.

Definition 22. Die durch (124a, b) definierte Funktionenfolge $\{s_n(x)\}$ nennen wir eine *natürliche Näherungsfolge* für $f(x)$ in J, und analog die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ eine *natürliche Reihendarstellung* von $f(x)$ in J.

Zu diesen Benennungen berechtigt uns

Satz 57. *Jede natürliche Näherungsfolge $\{s_n(x)\}$ für $f(x)$ in $\bar{J}$ konvergiert in $\bar{J}$ gleichmäßig gegen $f(x)$.*

Beweis. Vorbemerkung: Daß jede der Näherungsfunktionen $s_n(x)$ in $\bar{J}$ stetig ist, folgt leicht aus ihrer Stetigkeit auf der abgeschlossenen Menge $F_n(f, \bar{J})$ und ihrer Linearität auf der Komplementärmenge von $F_n(f, \bar{J})$, was wir im einzelnen nicht beweisen. Übrigens benutzen wir im folgenden Beweis die Stetigkeit von $s_n(x)$ nicht.

Nun sei $\varepsilon > 0$. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit der Funktion $f(x)$ in $\bar{J}$ existiert dann eine Größe $\eta > 0$ von der Beschaffenheit, daß aus

(128a) $$|x_1 - x_2| < \eta$$

stets

(128b) $$f(x_1) - f(x_2) < \frac{\varepsilon}{2}$$

folgt. Die Anzahl der η-Schachtelungen aus der Folge $\{B_n(f, J)\}$ ist nach Satz 53 (mit B_n anstatt E_n) endlich, wir bezeichnen sie wieder mit m_1. Des weiteren sei $N(\eta)$ die Zahl des Satzes 54, und es sei $n > N(\eta)$. Für $x \in F_n(f, \bar{J})$ haben wir gemäß (124a) die Abschätzung

(129) $$|s_n(x) - f(x)| = 0 < \varepsilon.$$

Nun sei (c, d) eine Komponente von $B_n(f, J)$, und es sei $d - c < \eta$. Wegen $c \in F_n(f, \bar{J})$ und $d \in F_n(f, \bar{J})$ haben wir gemäß (124a)

(130) $$s_n(c) = f(c); \; s_n(d) = f(d),$$

und wegen $d - c < \eta$ gilt für jeden Punkt $x \in [c, d]$ nach (128a, b) die Ungleichung

(131a) $$|f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

speziell also

(131b) $$|f(d) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Die Linearität der Funktion $s_n(x)$ in $[c, d]$ liefert schließlich die Abschätzung

$$|s_n(x) - s_n(c)| \leqq |s_n(d) - s_n(c)|. \tag{131c}$$

Aus (130) bis (131c) erhält man

$$|s_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ für } x \in (c, d). \tag{132}$$

Nunmehr sei x ein Punkt einer η-Komponente von $B_n(f, J)$; wegen $n > N(\eta)$ ist diese Komponente dann ein Intervall einer bestimmten η-Schachtelung aus der Folge $\{B_n(f, J)\}$. Die in dieser Folge enthaltenen η-Schachtelungen seien

$$\{c_{n,r}, d_{n,r}\} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots;\ r = 1, 2, \ldots, m_1). \tag{133}$$

Gemäß (124a, b) ist dann für $x \in \{c_{n,r}, d_{n,r}\}$:

$$s_n(x) = L(f;\ c_{n,r}, d_{n,r};\ x). \tag{134}$$

Für jede der Schachtelungen (133) bestimmen wir die zu ihr gehörige Zahl $N_r(\varepsilon)$ des Satzes 55 und bezeichnen die größte dieser m_1 Zahlen mit $N(\varepsilon)$.

Ist dann $n > N(\varepsilon)$, so gilt (132) auch in den Intervallen $\{c_{n,r};\ d_{n,r}\}$. Setzen wir schließlich

$$N = \operatorname{Max}\,[N(\eta), N(\varepsilon)],$$

so gilt für $n > N$ überall in J die Abschätzung

$$|s_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

womit der Satz bewiesen ist.

Korollar zu Satz 57. *Jede natürliche Reihendarstellung* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *einer stetigen Funktion* $f(x)$ *in* $\bar{J}$ *stellt eben diese Funktion dar, wobei die Konvergenz der Reihe gleichmäßig ist. Es ist also insbesondere*

$$\lim_{n\to\infty}\ (\max_{x\in\bar{J}} |f_n(x)|) = 0. \tag{135}$$

§ 3. Die alternierende natürliche Approximation.

Definition 23. Diejenige natürliche Näherungsfolge für $f(x)$ in J, die wir gemäß (124a, b) mit Hilfe der alternierenden kanonischen Summendarstellung (110c) der Menge $S(f, \bar{J})$ erhalten, nennen wir die *alternierende natürliche Näherungsfolge für* $f(x)$ *in* $\bar{J}$ und bezeichnen sie mit $\{s_n^*(x)\}$. Zu ihr gehört die *alternierende natürliche Reihendarstellung von* $f(x)$ *in* $\bar{J}$, welche wir $\sum_{n=0}^{\infty} f_n^*(x)$ schreiben.

Offensichtlich sind diese Reihe und diese Folge durch die Funktion $f(x)$ und das Segment $\bar{J}$ eindeutig bestimmt. Sie haben, wie wir sehen werden, besonders vereinfachende und übersichtliche Eigenschaften.

Satz 58. *Für* $x \in \bar{J} = [a, b]$ *gilt*

$$\left.\begin{aligned} s_{2r-1}^*(x) &\geqq f(x) \quad (136a)\\ s_{2r}^*(x) &\leqq f(x) \quad (136b)\end{aligned}\right\} (r = 1, 2, 3, \ldots).$$

Beweis. 1. Wir beweisen (136a) zuerst für $r = 1$.

a) Ist $V_1^*(f, J) = H_1^-(f, J)$ leer, so ist

$$s_1^*(x) = s_0^*(x) = L(f;\ a,\ b;\ x). \tag{137}$$

Nach Satz 27 ist außerdem $Q(f;\ a, b, x \geqq)\ 0$. Hieraus und aus (137) folgt aber $s_1^*(x) \geqq f(x)$.

b) Nun sei $V_1^*(f, J) = H_1^-(f, J)$ nicht leer. Definitionsgemäß ist dann

(138a) $$s_1^*(x) = f(x), \text{ wenn } x \in F_1^*(f, \bar{J}) = S_1^-(f, \bar{J}),$$

und auf jeder Komponente c, d der offenen Menge $B_1^*(f, J) = E_1^-(f, J)$

(138b) $$s_1^*(x) = L(f; c, d; x),$$

nach dem Korollar zu Satz 30 also

(138c) $$s_1^*(x) \geqq f(x), \text{ wenn } x \in B_1^*(f, J).$$

Mit (138a) und (138c) ist (136a) für $r = 1$ bewiesen.

2. Nunmehr beweisen wir (136a) für $r > 1$. Definitionsgemäß ist

(139) $$s_{2r-1}^*(x) = f(x), \text{ wenn } x \in F_{2r-1}^*(f, \bar{J}).$$

Nun sei $J_{2r-1} = (c_r, d_r)$ eine Komponente von $B_{2r-1}^*(f, J)$. Dann existiert genau eine Komponente J_{2r-2} von $B_{2r-2}^*(f, J)$ derart, daß

(140) $$J_{2r-1} \subseteq J_{2r-2}$$

ist. Nach (124a, b) ist sodann

(141) $$s_{2r-1}^*(x) = L(f; c_r, d_r; x), \text{ wenn } x \in J_{2r-1}.$$

Nach dem Konstruktionsverfahren der Mengen F_n^* und B_n^* ist aber J_{2r-1} auch eine Komponente der Menge $E_1(f, J_{2r-2})$, welch letztere in unserem Falle mit $E_1^-(f, J_{2r-2})$ identisch ist. Hieraus und aus (140) erhalten wir mit Hilfe des Korollars zu Satz 30

(142) $$s_{2r-1}^*(x) \geqq f(x), \text{ wenn } x \in B_{2r-1}^*(f, J).$$

Mit (139) und (142) ist (136a) bewiesen.

3. Der Beweis für (136b) ist völlig analog.

Satz 58a. *In $\bar{J}$ ist*

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(143a)} & s_{2r-1}^*(x) \geqq s_{2r+1}^*(x) \\ \text{(143b)} & s_{2r}^*(x) \leqq s_{2r+2}^*(x) \end{array}\right\} (r = 1, 2, 3, \ldots).$$

Beweis (für (143a)). 1. Ist $x \in F_{2r+1}^*(f, \bar{J})$, so ist nach (124a) und (136a)

(144) $$s_{2r+1}^*(x) = f(x) \leqq s_{2r-1}^*(x).$$

2. Nun sei $J_{2r+1} = (c_r, d_r)$ eine Komponente von $B_{2r+1}^*(f, J)$; sie liegt in genau einer Komponente J_{2r-1} von $B_{2r-1}^*(f, J)$.

Wegen $c_r \in F_{2r+1}^*(f, \bar{J})$ und $d_r \in F_{2r+1}^*(f, \bar{J})$ folgt aus (144)

(145) $$s_{2r+1}^*(c_r) \leqq s_{2r-1}(c_r); \; s_{2r+1}^*(d_r) \leqq s_{2r-1}^*(d_r).$$

Da nun die beiden Funktionen $s_{2r+1}^*(x)$, $s_{2r-1}^*(x)$ im Intervall (c_r, d_r) linear sind, erhält man aus (145) sofort

(146) $$s_{2r+1}^*(x) \leqq s_{2r-1}^*(x), \text{ wenn } x \in B_{2r+1}^*(f, J).$$

Mit (144) und (146) ist der Satz bewiesen.

Satz 59. *In $\bar{J}$ ist*

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(147a)} & f_{2r-1}^*(x) \geqq 0 \\ \text{(148a)} & f_{2r}^*(x) \leqq 0 \end{array}\right\} (r = 1, 2, 3, \ldots).$$

Beweis (für (147a)). Aus (136a) und (136b) sowie (125b) ergibt sich

$$f_{2r-1}^*(x) = s_{2r-1}^*(x) - s_{2r-2}^*(x) \geqq 0.$$

Satz 59a. *In $\bar{J}$ ist*

(149) $$|f_n^*(x)| \geqq |f_{n+1}^*(x)|, \text{ wenn } n \geqq 2 \text{ ist.}$$

Beweis. Ist n gerade, so ist nach Satz 59

(150) $$f_n^*(x) \leqq 0;\ f_{n+1}^*(x) \geqq 0.$$

Nach (143a), (125b), (150) ist

$$0 \geqq s_{n+1}^*(x) - s_{n-1}^*(x) = s_{n+1}^*(x) - s_n^*(x) + s_n^*(x) - s_{n-1}^*(x)$$
$$= f_{n+1}^*(x) + f_n^*(x) = |f_{n+1}^*(x)| - |f_n^*(x)|.$$

Für ungerade Werte n ist der Beweis analog.

Die Sätze 58, 58a und 57 zusammengenommen ergeben

Satz 60. *Die Folge $\{s_{2r-1}^*(x)\}$ ist monoton nicht zunehmend, die Folge $\{s_{2r}^*(x)\}$ monoton nicht abnehmend; beide Folgen konvergieren in $\bar{J}$ gleichmäßig gegen $f(x)$.*

Die Sätze 59 und 59a, zusammen mit dem Korollar zu 57, liefern

Satz 60a. *Die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} f_n^*(x)$ ist für jeden Wert $x \in \bar{J}$ eine alternierende Leibnizreihe, die in $\bar{J}$ gleichmäßig gegen $f(x)$ konvergiert; von einer bestimmten Stelle an können alle Glieder verschwinden.*

§ 4. Die linear-konkaven und die linear-konvexen Funktionen; die Grundfunktionen.

Wir fügen den in der Definition 16 geschaffenen drei Funktionalklassen noch zwei weitere hinzu:

Definition 24. Eine stetige Funktion $f(x)$ heiße *in $\bar{J}$ linear-konkav*, wenn $H^+(f, J)$ leer ist; sie heiße *in J linear-konvex*, wenn $H^-(f, J)$ leer ist.

Bemerkung 1. Der erste dieser beiden Begriffe umfaßt auch die in J rein linearen und rein konkaven, der zweite die in J rein linearen und rein konvexen Funktionen.

Bemerkung 2. In beiden Fällen ist $R(f, J)$ leer, was sich aus Satz 26 ergibt.

Die folgenden Sätze stellen wir der Einfachheit halber nur für linear-konkave Funktionen auf; die entsprechenden Sätze für linear-konvexe Funktionen liegen auf der Hand.

Aus der Definition 24, der Bemerkung 2 zu dieser Definition und der Beziehung (52) folgt unmittelbar

Satz 61. *Ist $f(x)$ in $\bar{J}$ linear-konkav, so ist*

$$J = \Lambda(f, J) \cup H^-(f, J).$$

Zudem aber gilt

Satz 62. *Die Funktion $f(x)$ ist dann und nur dann in $\bar{J}$ linear-konkav, wenn*

(151) $$S(f, \bar{J}) = S_1^-(f, \bar{J})$$

ist.

Beweis. 1. Ist (151) erfüllt, so ist $H^+(f, J)$ leer. Die Bedingung ist also hinreichend.

2. Es sei $H^+(f, J)$ leer. Dann ist $S_1(f, \bar{J}) = S_1^-(f, \bar{J})$.

Ist nun K eine Komponente von $E_1^-(f, J)$, so ist erstens $H_1^+(f, K)$ leer, weil $H^+(f, K)$ leer ist, zweitens aber ist nach Satz 30 auch $H_1^-(f, K)$ leer, so daß $H_1(f, K)$ leer ist. Nach Satz 31 ist demnach $f(x)$ in K linear, so daß wir zunächst $E_1^-(f, J) \leqq \Lambda(f, J)$ erhalten. Nun besteht aber die zu $E_1^-(f, J)$ komplementäre Menge $S_1^-(f, \bar{J})$ nur aus Konkavpunkten, so daß wir jetzt $\Lambda(f, J) = E_1^-(f, J)$ folgern können. Damit ist alles bewiesen.

Korollar zu Satz 62. *Ist $f(x)$ in $\bar{J}$ linear-konkav, so ist*

$$\Lambda(f, J) = E_1^-(f, J). \tag{152}$$

Satz 63. *Die Funktion $f(x)$ ist dann und nur dann in $\bar{J}$ linear-konkav, wenn für jedes Tripel von Hauptpunkten dieser Funktion in $\bar{J}$ die Dreiecksdiskriminante negativ ist.*

Beweis. 1. Es sei $f(x)$ in $\bar{J}$ linear-konkav, und es seien

$$x_i < x_j < x_k \tag{153}$$

drei Hauptpunkte von $f(x)$ in $\bar{J}$. Da x_j kein Randpunkt von $\bar{J}$ ist, liefert uns Satz 61 die Beziehung

$$x_j \in H_1^-(f, J). \tag{154}$$

Wäre $Q(f; x_i, x_j, x_k) \geqq 0$, so würde x_j nicht der Definition 11 für die Konkavpunkte erster Stufe in J genügen; es wäre also $x_j \bar{\in} H_1^-(f, J)$, im Widerspruch zu (154). Die Bedingung ist also notwendig.

2. Für jedes Tripel x_i, x_j, x_k von Hauptpunkten der Funktion $f(x)$ in $\bar{J}$ sei

$$Q(f; x_i, x_j, x_k) < 0. \tag{155}$$

Dann ist zunächst $H_1^+(f, J)$ leer. Wäre nämlich diese Menge nicht leer, so gäbe es in J mindestens einen konvexen Extremalhauptpunkt x_m von $f(x)$ in J (vgl. Definition 13ff.), für den $Q(f; a, b, x_m) > 0$ wäre, im Widerspruch zu (155).

Es ist also $H_1(f, J) = H_1^-(f, J)$, und damit auch

$$S_1(f, \bar{J}) = S_1^-(f, \bar{J}). \tag{156}$$

Nun sei $K = (c, d) < J$ eine Komponente von $E_1(f, J) = E_1^-(f, J)$. Erstens ist dann nach dem Korollar zu Satz 30 die Menge $H_1^-(f, K)$ leer; nach der Definition der Menge $H_2^-(f, J)$ ist damit auch diese Menge leer.

Zweitens ist aber auch $H_1^+(f, K)$ leer. Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es in K einen konvexen Extremalhauptpunkt x_j, für den $Q(f; c, d, x_j) > 0$ wäre, im Widerspruch zu (155), da ja c und d auch Hauptpunkte von f in J sind. Somit ist auch $H_2^+(f, J)$ leer. Insgesamt ist also $H_2(f, J)$ leer; nach Satz 31 ist $f(x)$ daher auf $E_1(f, J) = E_1^-(f, J)$ linear, so daß $H(f, J) = H_1^-(f, J)$, und damit $S(f, \bar{J}) = S_1^-(f, \bar{J})$ ist. Nach Satz 62 ist somit $f(x)$ linear-konkav in J, die Bedingung (155) also hinreichend.

Zum Schlusse dieses Paragraphen führen wir noch einen Begriff ein:

Definition 25. Eine Funktion $g(x)$ heiße *eine Grundfunktion in* $\bar{J} = [a, b]$, wenn $g(a) = g(b) = 0$ ist.

Satz 64. *Jede in $\bar{J} = [a, b]$ definierte Funktion $f(x)$ läßt sich auf eine und nur eine Art als Summe einer in $\bar{J}$ linearen Funktion und einer Grundfunktion in $\bar{J}$ darstellen.*

Beweis. Ist $f(x) = L(x) + g(x)$, wobei $L(x)$ linear und $g(x)$ eine Grundfunktion in $\bar{J}$ sei, so folgt aus (156)

$$L(a) = f(a); \quad L(b) = f(b),$$

wodurch $L(x)$ eindeutig bestimmt ist. Man erhält

$$L(x) = L(f; a, b; x) \tag{157a}$$

$$g(x) = -D(f; a, b; x). \tag{157b}$$

Definition 26. Wir nennen die Funktion $g(x) = -D(f; a, b; x)$ *die Grundfunktion von $f(x)$ in $\bar{J}$.*

Definition 27. Zwei Funktionen, deren Grundfunktionen in $\bar{J}$ übereinstimmen, nennen wir *in $\bar{J}$ zusammengehörig*; die Gesamtheit aller in J zusammengehörigen Funktionen heiße ein *Funktionenverband in $\bar{J}$* oder, wenn $g(x)$ die gemeinsame Grundfunktion in $\bar{J}$ ist, *der Funktionenverband über $g(x)$*.

Satz 65. *Zwei Funktionen sind dann und nur dann in $\bar{J}$ zusammengehörig, wenn sie sich um eine lineare Funktion unterscheiden.*

Beweis. 1. Aus $f_1(x) = g(x) + L_1(x)$, $\quad L_1(x)$ linear,

$$f_2(x) = g(x) + L_2(x), \qquad L_2(x) \text{ linear},$$

folgt $f_1(x) - f_2(x) = L_1(x) - L_2(x) = L_3(x)$, wobei $L_3(x)$ linear ist.

2. Es sei

$$f_1(x) - f_2(x) = L(x). \tag{158}$$

Die Grundfunktion von $f_i(x)$ sei $g_i(x)$. Dann ist $f_i(x) = g_i(x) + L_i(x)$, wobei $L_i(x)$ linear ist. Damit geht (158) über in

$$g_1(x) - g_2(x) = L(x) - L_1(x) + L_2(x) = L_3(x),$$

wobei $L_3(x)$ linear ist. Es ist also $g_1(x) - g_2(x)$ linear; aus (157b) und (33a) aber ergibt sich, daß $g_1(a) - g_2(a) = g_1(b) - g_2(b) = 0$ ist, womit die Identität von $g_1(x)$ und $g_2(x)$ im ganzen Segment nachgewiesen ist.

Satz 65a. *Alle Funktionen eines Funktionenverbandes in $\bar{J}$ haben übereinstimmende Mengen $H_n^+, H_n^-, \Lambda, R (n = 1, 2, \ldots)$.*

Beweis. Es seien $f_1(x)$ und $f_2(x)$ Funktionen desselben Verbandes. Nach Satz 65 ist dann $f_1(x) = f_2(x) + L(x)$, wobei $L(x)$ linear ist. Sind nun x_i, x_j, x_k drei beliebige Punkte in $\bar{J}$, so ist $Q(L; x_i, x_j, x_k) = 0$; nach (42d) in Satz 16 ist demnach $Q(f_1; x_i, x_j, x_k) = Q(f_2; x_i, x_j, x_k)$. Daraus und aus den Definitionen 7 und 8 folgt die Behauptung.

Satz 66. *Eine stetige linear-konkave Grundfunktion $g(x)$ in $\bar{J} = [a, b]$ ist entweder identisch Null oder im ganzen Intervall J positiv.*

Beweis. Der erste Teil der Alternative ist trivial. Es sei daher $g(x)$ in $\bar{J}$ nicht identisch Null. Dann ist $J \cap S(g, \bar{J}) = J \cap S_1^-(g, \bar{J})$ nicht leer; es sei $x_j \in J \cap S_1^-(g, \bar{J})$. Definitionsgemäß ist $Q(g; a, b, x_j) < 0$; hieraus und aus $g(a) = g(b) = 0$ folgt $g(x_j) > 0$.

Ist aber $x_j \in \Lambda(g, J)$, so liegt x_j in einer Komponente $K = (c, d)$ von $\Lambda(g, J)$; wobei die beiden Punkte c und d zu $S_1^-(f, J)$ gehören, jedoch höchstens einer von ihnen zu $G(\bar{J})$ gehören kann. Die Funktion $g(x)$ nimmt daher in dem einen Randpunkt von K nach dem soeben Bewiesenen einen positiven, im anderen einen nichtnegativen Wert an; der Wert $g(x_j)$ ist als linearer Interpolationswert zwischen diesen beiden Werten demnach selbst positiv.

Satz 66a. *Eine nicht verschwindende stetige linear-konkave Grundfunktion $g(x)$ in $\bar{J}$ nimmt ihren Maximalwert M in $\bar{J}$ entweder in genau einem Punkte P oder in genau einem Segment $\bar{J}_1 < J$ an.*

Der Beweis ergibt sich daraus, daß $g(x)$ mindestens einen und höchstens zwei konkave Extremalhauptpunkte in $\bar{J}$ besitzt (vgl. Definition 13ff.).

§ 5. Die Struktur der alternierenden natürlichen Summanden $f_n^*(x)$.

Nach (124a, b) und (125a) ist

$$f_0^*(x) = L(f; a, b; x), \tag{159}$$

also $f_0^*(x)$ eine in $\bar{J}$ lineare Funktion. Wegen

$$s_1^*(x) = f_0^*(x) + f_1^*(x) \tag{160}$$

sind daher $s_1^*(x)$ und $f_1^*(x)$ nach Satz 65 in $\bar{J}$ zusammengehörig.

Satz 67. *Der alternierende natürliche Summand $f_1^*(x)$ ist eine in $\bar{J}$ linear-konkave Grundfunktion.*

Beweis. Ist $V_1^*(f, J) = H_1^-(f, J)$ leer, so ist $f_1^*(x) \equiv 0$.

Nun sei $V_1^*(f, J) = H_1^-(f, J)$ nicht leer. Dann ist $f_1^*(x)$ zunächst eine Grundfunktion in $\bar{J}$, weil für sie (127a) gilt, mit $n = 1$ und f_1^*, F_0^* anstatt f_1, F_0. Den Beweis, daß $f_1^*(x)$ linear-konkav in $\bar{J}$ ist, erbringen wir dadurch, daß wir ihn für die mit $f_1^*(x)$ zusammengehörige Funktion $s_1^*(x)$ führen. Nach (124b) ist $s_1^*(x)$ auf $E_1^-(f, J)$ linear, woraus zunächst

$$\Lambda(s_1^*, J) \geqq E_1^-(f, J) \tag{161a}$$

folgt, für die beiderseitigen Komplementärmengen also

$$S(s_1^*, \bar{J}) \cup R(s_1^*, J) \leqq S_1^-(f, J), \tag{161b}$$

hiernach a fortiori

$$S(s_1^*, \bar{J}) \leqq S_1^-(f, J). \tag{161c}$$

Nun seien x_i, x_j, x_k drei Punkte aus $S(s_1^*, \bar{J})$; da sie auch zu $S_1^-(f, \bar{J})$ gehören, gilt für sie

$$Q(f; x_i, x_j, x_k) < 0. \tag{162a}$$

In diesen drei Punkten stimmen aber $s_1^*(x)$ und $f(x)$ nach (124a) überein; damit sind ihre Dreiecksdiskriminanten für dieses Tripel gleich, so daß auch

$$Q(s_1^*; x_i, x_j, x_k) < 0 \tag{162b}$$

ist. Daraus folgt nach Satz 63 sofort, daß $s_1^*(x)$ in $\bar{J}$ linearkonkav ist, so daß Satz 67 bewiesen ist.

Wir beweisen jetzt noch etwas mehr: daß die beiden Beziehungen (161a, b) sich durch die schärferen

$$\Lambda(s_1^*, J) = E_1^-(f, J) \tag{163a}$$

$$S(s_1^*, \bar{J}) = S_1^-(f, \bar{J}) \tag{163b}$$

ersetzen lassen. Zunächst bemerken wir, daß $R(s_1^*, J)$ leer ist, weil $s_1^*(x)$ in $\bar{J}$ linear-konkav ist (vgl. Bemerkung 2 zu Definition 24).

Nun sei $x_j \in S_1^-(f, \bar{J})$. Nach Satz 66 ist dann entweder $x_j \in S(s_1^*, \bar{J})$ oder $x_j \in \Lambda(s_1^*, J)$.

Wäre $x_j \in \Lambda(s_1^*, J)$, so läge x_j in einer Komponente (c, d) der Menge $\Lambda(s_1^*, J)$, und es wäre

$$Q(s_1^*; c, d, x_j) = 0. \tag{164a}$$

Als Endpunkte einer Komponente von $\Lambda(s_1^*, J)$ gehören die beiden Punkte c, d zu $S(s_1^*, \bar{J})$ und damit nach (161b) zu $S_1^-(f, \bar{J})$, ebenso wie x_j. Da $s_1^*(x)$ und $f(x)$ in diesen drei Punkten übereinstimmen, folgt aus (164a) die Beziehung

$$Q(f; c, d, x_j) = 0. \tag{164b}$$

Andrerseits folgt aus $x_j \in S_1^-(f, \bar{J})$ und $c < x_j < d$ definitionsgemäß (Definition 11)

(164c) $$Q(f; c, d, x_j) < 0.$$

Mit diesem Widerspruch ist $x_j \bar{\in} \Lambda(s_1^*, J)$, also $x_j \in S(s_1^*, \bar{J})$ bewiesen.

Wegen der Zusammengehörigkeit von $f_1^*(x)$ und $s_1^*(x)$ folgern wir aus (163a, b) und Satz 67 das

Korollar zu Satz 67. *Es ist*

(165a) $$\Lambda(f_1^*, J) = E_1^-(f, J)$$

(165b) $$S(s_1^*, \bar{J}) = S_1^-(s_1^*, \bar{J}) = S_1^-(f, \bar{J}).$$

Der Satz 67 und sein Korollar geben uns auch Aufschluß über die Struktur der Funktionen $f_n^*(x)$ für $n \geqq 2$. Wie schon in (127a) bemerkt, ist $f_n^*(x) = 0$ für $x \in F_{n-1}(f, \bar{J})$. Damit ist $f_n^*(x)$ nicht nur eine Grundfunktion in $\bar{J}$, sondern in jeder durch ihre Endpunkte abgeschlossenen Komponente von $B_{n-1}^*(f, J)$.

Satz 68. *Die Funktion $f_{2r+1}^*(x)$ ist in jeder durch ihre Endpunkte abgeschlossenen Komponente der offenen Menge $B_{2r}^*(f, J)$ eine linear-konkave, die Funktion $f_{2r}^*(x)$ in jeder durch ihre Endpunkte abgeschlossenen Komponente der offenen Menge $B_{2r-1}^*(f, J)$ eine linear-konvexe Grundfunktion* $(r = 1, 2, 3, \ldots)$.

Beweis. Es genügt, den Beweis für die erste Behauptung zu führen. Es sei $K = (c, d)$ eine Komponente von $B_{2r}^*(f, J)$. Nach (127a) ist dann $f_{2r+1}^*(c) = f_{2r+1}^*(d) = 0$, die Funktion $f_{2r+1}^*(x)$ somit eine Grundfunktion in $\bar{K}$.

Nach (79), mit V_{2r+1}^* anstatt H_{n+1}, und nach (111a) ist

(166) $$K \cap V_{2r+1}^*(f, J) = H_1(f, K) = H_1^-(f, K).$$

Gemäß (124a, b) folgt hieraus

(167a) $$s_{2r+1}^*(x) = f(x), \quad \text{wenn } x \in S_1^-(f, \bar{K})$$

(167b) $$s_{2r+1}^*(x) \text{ linear auf jeder Komponente von } E_1^-(f, K).$$

Damit ist $s_{2r+1}^*(x)$ in $\bar{K}$ auf ebendieselbe Weise bestimmt wie $s_1^*(x)$ in $\bar{J}$. Wir dürfen daher den Beweis für Satz 67 anwenden; nach diesem ist $s_{2r+1}^*(x)$ eine linear-konkave Funktion in $\bar{K}$.

Um zu unserer Behauptung zu gelangen, haben wir nach Satz 65a nur noch zu beweisen, daß $s_{2r+1}^*(x)$ und $f_{2r+1}^*(x)$ in $\bar{K}$ zusammengehörig sind. Dies folgt aber sofort aus der Beziehung $s_{2r+1}^*(x) = s_{2r}^*(x) + f_{2r+1}^*(x)$ und Satz 65, weil $s_{2r}^*(x)$ definitionsgemäß in $\bar{K}$ linear ist.

§ 6. Die beiden Grundkonstruktionen.

Definition 28. In einem Segment $\bar{J}$ sei eine vollständig abgeschlossene Menge F gegeben; ihre offene Komplementärmenge sei B. Alle in $\bar{J}$ linear-konkaven Grundfunktionen $g(x)$, für welche

a) $$S(g, \bar{J}) = F$$

b) $$\Lambda(g, J) = B$$

c) $$\max_{x \in \bar{J}} g(x) = m$$

ist, fassen wir zu einer *Funktionenklasse* zusammen, die wir mit

(168) $$\Phi[\bar{J}, F, m]$$

bezeichnen.

Satz 69. *Ist eine beliebige auf $\bar{J}$ vollständig abgeschlossene Menge F vorgegeben sowie eine Konstante $m > 0$, ist außerdem $F \setminus G(\bar{J})$ nicht leer, so ist $\Phi[\bar{J}, F, m]$ nicht leer.*

Beweis. Es sei $x_j \in F \setminus G(\bar{J})$. Dann läßt sich immer eine in $\bar{J}$ rein konkave Funktion $f(x)$ angeben (beispielsweise eine ganze rationale Funktion), welche auf $G(\bar{J})$ verschwindet und in $x = x_j$ den Wert m als Maximalwert annimmt. Setzt man nun

(169a) $\qquad g(x) = f(x)$, wenn $x \in F$,

(169b) $\qquad g(x)$ linear in jeder Komponente von $\bar{J} \setminus F$,

so erfüllt $g(x)$ die Forderungen des Satzes.

Korollar 1 zu Satz 69. *Die Klasse $\Phi[\bar{J}, F, 0]$ ist dann und nur dann nicht leer, wenn $F = G(J)$ ist. Sie enthält in diesem Falle nur ein Element, nämlich die Funktion $g(x) \equiv 0$.*

Korollar 2 zu Satz 69. *Die Klasse $\Phi[\bar{J}, G(\bar{J}), m]$ ist dann und nur dann nicht leer, wenn $m = 0$ ist. Sie enthält in diesem Falle ein Element, nämlich die Funktion $g(x) \equiv 0$.*

Definition 29. In einem Segment $\bar{J}$ sei eine vollständig abgeschlossene Menge F gegeben, die Komponenten ihrer offenen Komplementärmenge seien $K_r (r = 1, 2, \ldots)$. Auf jeder Komponente K_r sei eine Menge V_r von der Beschaffenheit gegeben, daß die Menge $F_r = G(\bar{K}_r) \cup V_r$ auf $\bar{K}_r$ vollständig abgeschlossen sei. Schließlich sei jeder Komponente K_r eine Zahl m_r zugeordnet. Alle Funktionen $g(x)$, die den Bedingungen

a) $\qquad g(x) = 0$, wenn $x \in F$

b) $\qquad g(x) \in \Phi[\bar{K}_r, F_r, m_r]$ für $x \in \bar{K}_r$

genügen, fassen wir zu einer *Funktionenklasse* zusammen, die wir mit

(170) $$\Psi[\bar{J}, F, \{V_r\}, \{m_r\}]$$

bezeichnen.

Unmittelbar aus Satz 69 und seinen Korollaren ergibt sich

Satz 70. *Eine Klasse $\Psi[\bar{J}, F, \{V_r\}, \{m_r\}]$ ist dann und nur dann nicht leer, wenn*

a) *jeder nicht leeren Menge V_r ein Wert $m_r > 0$,*

b) *jeder leeren Menge V_r der Wert $m_r = 0$*

zugeordnet ist.

Nunmehr untersuchen wir die Stetigkeitsverhältnisse der Funktionen einer Φ- bzw. einer Ψ-Klasse.

Satz 71. *Jede Funktion einer nicht leeren Klasse $\Phi[\bar{J}, F, m]$ ist in $\bar{J}$ stetig.*

Denn sie ist in $\bar{J}$ linear-konkav.

Satz 72. *Die Funktionen einer nicht leeren Klasse $\Psi[\bar{J}, F, \{V_r\}, \{m_r\}]$ sind dann und nur dann in $\bar{J}$ stetig, wenn entweder die Anzahl der Komponenten K_r von $\bar{J} \setminus F$ endlich ist, oder, falls diese Anzahl unendlich ist, die Bedingung*

(171) $$\lim_{r \to \infty} m_r = 0$$

erfüllt ist.

Beweis. Ist $g(x) \in \Psi[\bar{J}, F, \{V_r\}, \{m_r\}]$, so ist $g(x)$ nach Satz 70 und Definition 29 im Inneren jeder Komponente K_r stetig, in ihren Randpunkten wenigstens bezüglich K_r stetig. Eventuelle Unstetigkeitspunkte gehören also zu F.

Ist nun $x_0 \in F$, so ist $g(x)$ in x_0 bezüglich F stetig, weil auf F stets $g(x) = 0$ ist; es kann somit x_0 nur dann ein Unstetigkeitspunkt sein, wenn er Häufungspunkt von $\bar{J} \setminus F$ ist.

Es sei also $x_0 \in F$ und $x_0 \in (\bar{J} \setminus F)'$. Ist x_0 nach der einen Seite Randpunkt einer Komponente K_r, nach der anderen nicht Häufungspunkt von $\bar{J} \setminus F$, so ist $g(x)$ nach dem vorher Bewiesenen in x_0 beiderseitig stetig, und dasselbe trifft auch dann zu, wenn x_0 gemeinsamer Randpunkt zweier Komponenten K_r und $K_{\bar{r}}$ ist.

Das sind aber alle Möglichkeiten, die eintreten können, wenn die Anzahl der Komponenten K_r endlich ist, so daß die Behauptung für diesen Fall bewiesen ist.

Ist die Anzahl der Komponenten unendlich, so kann der Fall eintreten, daß x_0 mindestens nach einer Seite Häufungspunkt sowohl von F als auch von $\bar{J} \setminus F$ ist. In jeder Umgebung von x_0 liegen dann unendlich viele Komponenten.

Ist nun die Bedingung (171) erfüllt, so gibt es bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ eine Zahl R von der Beschaffenheit, daß aus $r > R$ stets $m_r < \varepsilon$ folgt. Außerdem existiert eine Umgebung U von x_0 derart, daß U nur solche Komponenten K_r enthält, für welche $r > R$ ist. Hieraus und aus der Maximalbedeutung von m_r folgt, daß für $x \in U$ stets $0 \leqq g(x) < \varepsilon$ ist.

Ist andrerseits $g(x)$ in $\bar{J}$ stetig, so nehmen wir an, die Bedingung (171) sei nicht erfüllt. Dann gibt es eine unendliche Teilfolge $\{m_{r_s}\}$ von $\{m_r\}$ und eine Konstante $c > 0$ von der Beschaffenheit, daß für jeden Index s die Abschätzung $m_{r_s} > c$ gilt.

In jeder Komponente K_{r_s} gibt es einen Punkt x_{r_s}, in welchen $g(x_{r_s}) = m_{r_s}$ ist. Die Folge $\{x_{r_s}\}$ hat mindestens einen Häufungspunkt $x_0 \in F$ (zu $\bar{J} \setminus F$ gehört x_0 deshalb nicht, weil jeder Punkt $x \in \bar{J} \setminus F$ nur Häufungspunkt von Punkten ein und derselben Komponente K_r ist).

Es ist also $g(x_0) = 0$, aber $\overline{\lim\limits_{x \to x_0}}\, g(x) \geqq c$, so daß $g(x)$ in x_0 nicht stetig ist, entgegen unserer Annahme.

Die Funktionen der Φ-Klassen und der Ψ-Klassen werden die Bausteine sein, aus denen wir jede stetige Funktion $f(x)$ zusammensetzen werden.

Definition 30a. Die Konstruktion einer beliebigen Funktion $g(x)$ aus einer gegebenen Klasse $\Phi(\bar{J}, F, m)$ heiße die *erste Grundkonstruktion.*

Definition 30b. Die Konstruktion einer beliebigen Funktion $g(x)$ aus einer gegebenen Klasse $\Psi[\bar{J}, F, \{V_r\}, \{m_r\}]$ heiße die *zweite Grundkonstruktion.*

Beide Grundkonstruktionen sollen als stets ausführbar gelten, in dem Sinne, daß mit einer Funktionenklasse $\Phi(\bar{J}, F, m)$ bzw. einer Funktionenklasse $\Psi[J, F, \{V_r\}, \{m_r\}]$ jede in ihr enthaltene Funktion $g(x)$ einzeln gegeben ist.

§ 7. Die stetige Funktion als Summe einer linearen Funktion und abzählbar vieler Ψ-Funktionen.

Im folgenden seien

$$K^*_{n,r} (r = 1, 2, \ldots) \text{ die Komponenten von } B^*_n(f, J).$$

Ferner setzen wir

$$V^*_{n,r} = K^*_{n-1,r} \cap V^*_n(f, J) \tag{172}$$

$$m_{n,r} = \max_{x \in V^*_{n,r}} |f^*_n(x)| = \max_{x \in K^*_{n-1,r}} |f^*_n(x)|; \tag{173}$$

die letzte Gleichung stützt sich auf Satz 66a.

Mit diesen Bezeichnungen sowie den Klassenbegriffen Φ und Ψ können wir die in § 5 untersuchten Strukturen der alternierenden natürlichen Summanden $f_n^*(x)$ in $\bar{J}$ sehr kurz ausdrücken: Es ist

(174a) $$f_0^*(x) \text{ in } \bar{J} \text{ linear},$$

(174b) $$f_1^*(x) \in \Phi[\bar{J}, F_1^*(f, \bar{J}), m_1],$$

und für jeden festen Wert $n \geqq 2$:

(174c) $$(-1)^{n-1} f_n^*(x) \in \Psi[\bar{J}, F_{n-1}^*(f, \bar{J}), \{V_{n,r}^*\}, \{m_{n,r}^*\}] \qquad (r = 1, 2, \ldots).$$

Ist die Anzahl der Komponenten $K_{n-1,r}$ unendlich, so genügen wegen der Stetigkeit von $f_n^*(x)$ die Zahlen $m_{n,r}$ nach Satz 72 der Beziehung

(175) $$\lim_{r \to \infty} m_{n,r} = 0.$$

Zu dieser Beziehung tritt noch eine analoge. Setzen wir nämlich

(176) $$m_n = \max_{x \in \bar{J}} |f_n^*(x)|,$$

so ist nach Satz (59a)

(177) $$m_n \geqq m_{n+1}, \text{ wenn } n \geqq 2,$$

und wegen der in Satz 60a ausgesprochenen gleichmäßigen Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n^*(x)$ außerdem

(178) $$\lim_{n \to \infty} m_n = 0,$$

wenn die Mengen $V_n^*(f, J)$ nicht von einem bestimmten Index an leer sind. Im entgegengesetzten Falle wird die Beziehung (178) von selbst illusorisch; die endlich vielen Werte m_n unterliegen dann nur der Einschränkung (177).

§ 8. Die einheitliche Konstruktion der stetigen Funktionen.

Wir geben jetzt die Konstruktion an, die uns jede in $\bar{J} = [a, b]$ stetige Funktion liefert. Wir geben uns vor

a) eine beliebige vollkommene F_σ-Menge $F \subseteq \bar{J}$;

b) eine beliebige auf $\bar{J}$ kanonische Darstellung dieser Menge:

(179a) $$F = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n;$$

hierbei setzen bzw. nennen wir

(179b) $$\bar{J} \setminus F_n = B_n,$$

(179c) $$F_n - F_{n-1} = V_n \qquad (n \geqq 1),$$

(179d) $$K_{n,r} (r = 1, 2, \ldots) \text{ die Komponenten von } B_n,$$

(179e) $$V_{n,r} = K_{n-1,r} \cap V_n$$

und es sei

(179f) $$V_1 \text{ nicht leer};$$

c) eine Folge $\{m_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, welche den Bedingungen

(180a) $$m_n \geqq 0 \qquad (n \geqq 1)$$

(180b) $$m_n \geqq m_{n+1} \qquad (n \geqq 2)$$

(180c) $$\lim_{n \to \infty} m_n = 0$$

genügt;

d) für jeden festen Wert n eine Folge $\{m_{n,r}\}$ $(r = 1, 2, \ldots)$, welche den Bedingungen

(181a) $$0 \leqq m_{n,r} \leqq m_n$$

(181b) $$\lim_{r\to\infty} m_{n,r} = 0$$

genügt.

Aus diesen Vorgaben heraus konstruieren wir eine Funktionenfolge $\{f_n(x)\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ auf folgende Weise:

(182a) $f_0(x)$ eine beliebige in $\bar{J}$ lineare Funktion;

(182b) $f_1(x) \in \Phi(\bar{J}, F_1, m_1)$;

(182c) $f_n(x) \in \Psi(\bar{J}_1, F_{n-1}, \{V_{n,r}\}, \{m_{n,r}\})$, wenn $n \geqq 2$ ist, wobei wir, was immer möglich ist, die Funktion $f_{n+1}(x)$ so wählen, daß

(182d) $$f_{n+1}(x) \leqq f_n(x) \text{ für } x \in \bar{J}$$

ist.

Schließlich setzen wir

(183) $$f(x) = f_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} f_n(x)$$

und behaupten

Satz 73. *Die in* (183) *konstruierte Funktion* $f(x)$ *ist in* $\bar{J}$ *stetig, und es ist* (183) *ihre alternierende natürliche Summendarstellung in* $\bar{J}$.

Beweis. 1. Der Summand $f_0(x)$ in (183) ist nach (182a) in $\bar{J}$ stetig, die Glieder $(-1)^{n-1} f_n(x)$ der Reihe sind es nach (182b, c). Diese Reihe konvergiert in $\bar{J}$ gleichmäßig. Aus (182b, c), (181a) und (180a) folgt zunächst, daß in $\bar{J}$ gleichmäßig

(184) $$\lim_{n=\infty} f_n(x) = 0$$

ist; wenn die Reihe überhaupt konvergiert, so konvergiert sie demnach gleichmäßig. Daß sie aber konvergiert, ergibt sich nach dem Leibnizschen Kriterium aus (182d), (184) und dem alternierenden Vorzeichen ihrer Glieder. Aus der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe folgt die Stetigkeit von $f(x)$ in $\bar{J}$.

2. Zum Beweise der zweiten Behauptung setzen wir

(185) $$s_n(x) = \sum_{r=0}^{n} f_n(x).$$

Auf Grund der Konstruktionsvorschriften (182b, c) gilt dann

(186) $$s_n(x) = f(x), \text{ wenn } x \in F_n,$$

wegen (182d) und wegen des alternierenden Vorzeichens aber erhalten wir die den Sätzen 58 und 58a entsprechenden Beziehungen

(187) $$s_{2r-1}(x) \geqq s_{2r+1}(x) \geqq f(x) \geqq s_{2r+2}(x) \geqq s_{2r}(x) \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots).$$

Nun sei $x_j \in V_1 < F_1$, nach (186) also

(188a) $$f(x_j) = s_1(x_j).$$

Gemäß der Konstruktionsvorschrift (182b) ist

(188b) $$x_j \in H_1^-(s_1, J).$$

Aus (188a, b), verbunden mit $s_1(x) \geqq f(x)$ folgt aber

(188c) $$x_j \in H_1^-(f, J) = V_1^*(f, J),$$

womit

(189) $$V_1 \leqq V_1^*(f, J)$$

nachgewiesen ist.

Umgekehrt sei jetzt

(190) $$x_k \in V_1^*(f, J) = H_1^-(f, J).$$

Wäre $x_k \bar{\in} V_1$, so läge x_k in einer Komponente (c, d) der Menge B_1, in welcher $f_1(x)$ und damit auch $s_1(x)$ linear ist. Es wäre also

(191a) $$Q(s_1; c, d, x_k) = 0.$$

Auf Grund von (190) und $c < x_k < d$ ist andrerseits

(191b) $$Q(f; c, d, x_k) < 0,$$

und wegen $c \in F_1$, $d \in F_1$ ist schließlich

(191c) $$s_1(c) = f(c); \; s_1(d) = f(d).$$

Aus (191a) bis (191c) folgt

(192) $$s_1(x_k) < f(x_k),$$

im Widerspruch zu (187). Es ist somit $x_k \in V_1$, so daß wir

(193) $$V_1^*(f, J) \leqq V_1$$

erhalten.

Hiermit und mit (189) ist

(194a) $$V_1 = V_1^*(f, J)$$

bewiesen.

Ist nun $n > 1$, so führt man eben diesen Beweis in jeder Komponente von B_{n-1} und erhält so

(194b) $$V_n = V_n^*(f, J)$$

für jeden Wert n. Damit ist aber der Beweis beendet.

Ist andrerseits eine beliebige in $\bar{J}$ stetige Funktion $f(x)$ gegeben, so befolgen die zu ihr gehörigen Mengen $V_n^*(f, J)$ und Zahlenfolgen $\{m_n\}$, $\{m_{n,r}\}$ sowie die Funktionen $f_n^*(x)$ sowohl die Vorgaben a) bis d) für unsere Konstruktion als auch die Regeln dieser Konstruktion selbst, was aus den §§ 3 bis 5 sich ergibt. Da außerdem jede Funktion $f(x)$ eine und nur eine alternierende natürliche Summendarstellung besitzt, erhalten wir schließlich

Satz 74. *Führen wir die einheitliche Konstruktion für alle zulässigen Vorgabenkomplexe und alle zulässigen Konstruktionsschritte durch, so erhalten wir alle in $\bar{J}$ stetigen Funktionen $f(x)$, und jede nur einmal.*

Nach diesem Satze ist die Mächtigkeit der Menge aller in $\bar{J}$ stetigen Funktionen, also die Mächtigkeit C, nicht kleiner als die Mächtigkeit aller in $\bar{J}$ vollkommenen F_σ-Mengen. Andrerseits ist diese letztere Mächtigkeit aber auch nicht kleiner als C, da jeder einzelne Punkt von J zusammen mit $G(\bar{J})$ eine auf $\bar{J}$ vollkommene F_σ-Menge bildet. Daraus erhält man (da das Weglassen der Randpunkte nichts ausmacht) den

Satz 75. *Sowohl die Menge aller F_σ-Mengen auf $\bar{J}$ als die Menge aller G_δ-Mengen auf J haben die Mächtigkeit des Kontinuums* [1]).

[1]) Dagegen hat die Menge aller meßbaren Mengen auf $\bar{J}$ die Mächtigkeit 2^C; (vgl. etwa *I. P. Natanson*, Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen, Berlin 1954, Akad. Verl., p. 77).

§ 9. Die Bedeutung der Vorgaben a) und b) für die einheitliche Konstruktion.

Durch die Vorgabe der vollkommenen F_σ-Menge F und einer ihrer kanonischen Summendarstellungen in $\bar{J}$ ist die Struktur der zu konstruierenden Funktion $f(x)$ schon in ihren Grundzügen festgelegt. Denn aus den Sätzen 73 und 45 erhalten wir

$$F = F^*(f, \bar{J}) = S(f, \bar{J}); \tag{195a}$$

die Menge der erreichbaren Hauptpunkte ist für $f(x)$ somit vorgeschrieben. Mit F ist auch die G_δ-Menge $B = \bar{J} \setminus F$ vorgegeben; verwenden wir noch (85), (92), (93a, b), so ist

$$B = E(f, J) = E_p(f, J) \cup E_\Lambda(f, J). \tag{195b}$$

Daraus folgt zunächst, daß auch die Menge $\Lambda(f, J)$ der Linearpunkte vorgeschrieben ist, da nach Satz 38 die Menge der inneren Punkte von $E_\Lambda(f, J)$ mit der Menge $\Lambda(f, J)$ identisch ist. Aber auch die Menge $R(f, J)$ der Restpunkte liegt im allgemeinen fest, weil nach Satz 37 alle Punkte von $E_p(f, J)$ Restpunkte sind. Unbestimmt bleibt nach Satz 39 nur der Charakter derjenigen Punkte in $\bar{J}$, welche der in III, § 7 eingeführten abzählbaren und nirgends dichten Menge $\lambda(f, \bar{J})$ angehören. Welche Punkte dieser Menge nach Beendigung der Konstruktion nicht erreichbare Hauptpunkte, welche Restpunkte sind, hängt von den anderen Vorgaben und von den Einzelheiten der Konstruktion ab.

Durch die Vorgabe der kanonischen Summendarstellung (179a) ist sodann die Einteilung der Menge $S(f, \bar{J})$ in Konkav- und Konvexpunkte vorgeschrieben. Wir machen noch eine Bemerkung zu der Vorschrift (179f); diese Vorschrift vermindert zunächst die Allgemeinheit, da sie alle Funktionen $f(x)$ ausschließt, für welche $H_1^-(f, J)$ leer ist. Es sei $f(x)$ eine derartige Funktion. Entweder ist dann $f(x)$ in J linear; dann sind alle Funktionen $f_n^*(x)$ für $n \geqq 1$ identisch Null. Oder es ist $H_1^+(f, J)$ nicht leer; in diesem Falle ist $g(x) = -f(x)$ eine nach unserem Verfahren konstruierbare Funktion. Damit ist die in (179f) gemachte Einschränkung als unwesentlich nachgewiesen.

Ist die vorgegebene Menge F in einem Segment $\bar{J}_1 < \bar{J}$ vollständig zweiter Kategorie, so folgt aus Satz 8, daß B nirgends dicht ist; da in diesem Falle $\Lambda(f, J)$ leer ist, so ist $B = R(f, J)$, so daß auch $R(f, J)$ nirgends dicht ist. Nach Satz 49 ist daher die Funktion $f(x)$ in $\bar{J}_1$ abschnittweise regulär, wobei ihre Funktionskurve in J_1 aus primitiven Bogen zweiter Ordnung besteht.

Ist andrerseits F als dichte Menge erster Kategorie auf $\bar{J}_1 < \bar{J}$ vorgegeben, so ist nach Satz 8 jeder kanonische Summand F_n nirgends dicht auf $\bar{J}$, und es ist B eine Residualmenge. Nun ist aber in diesem Falle $B = R(f, J)$, so daß $f(x)$ nach Satz 50 überall in $\bar{J}_1$ doppelwendig ist, und die Funktionskurve in $\bar{J}_1$ ein primitiver Bogen der Ordnung Unendlich.

Wir bemerken noch, daß man sich zur Konstruktion einer in $\bar{J}$ nirgends differenzierbaren Funktion eine dichte E-Menge F erster Kategorie auf $\bar{J}$ vorgeben muß; das folgt unmittelbar aus Satz 51b und seinem Korollar.

§ 10. Die Konstruktion aller Funktionen einer vorgegebenen Klasse $\Phi[\bar{J}, F, m]$.

Wir ergänzen die am Schluß des § 6 gemachte Annahme über die Ausführbarkeit der beiden Grundkonstruktionen dadurch, daß wir ein einfaches Verfahren angeben, welches sämtliche zu einer Klasse $\Phi[\bar{J}, F, m]$ gehörigen linear-konkaven Grundfunktionen liefert. Daß damit auch alle zu einer Klasse $\Psi[\bar{J}, F, \{V_r\}, \{m_r\}]$ gehörigen Funktionen konstruierbar sind, ergibt sich aus der Definition 29.

Es sei $\Phi[\bar{J}, F, m]$ eine vorgegebene Klasse, wobei wir $m > 0$ und $J \frown F$ nicht leer voraussetzen dürfen.

Wir setzen $B = \bar{J} \setminus F$, und es seien $K_r (r = 1, 2, \ldots)$ die Komponenten von B.

Dann läßt sich die Konstruktion der in Φ enthaltenen Funktionen zurückführen

Schließlich sei $\bar{J} = [a, b]$.

auf die einfachere Konstruktion einer Schar monoton nicht zunehmender Funktionen $\varphi(x)$, welche folgenden Bedingungen genügen:

α) $\varphi(x)$ ist innerhalb jeder Komponente K_r konstant;

β) sind (c_1, d_1) und (c_2, d_2) zwei Komponenten von B, wobei $d_1 \leqq c_2$ sei, so ist der Wert von φ in (c_1, d_1) größer als der Wert von φ in (c_2, d_2);

γ) es ist $\int\limits_a^b \varphi(x)\, dx = 0$;

δ) der Maximalwert der Integralfunktion $f(x) = \int\limits_a^x \varphi(t)\, dt$ ist m.

Dann ist $f(x) \in \Phi[\bar{J}, F, m]$, und jede zu Φ gehörige Funktion läßt sich auf diesem Wege gewinnen.

Den Beweis für diese beiden Behauptungen zu führen, dürfte sich erübrigen. Wohl aber sei noch darauf hingewiesen, daß die Kopplung der zu Φ gehörigen Funktion $f(x)$ mit der monoton nicht zunehmenden Funktion $\varphi(x)$ eineindeutig wird, wenn man der Funktion $\varphi(x)$ noch die Bedindung

$$\varphi(x) = \tfrac{1}{2} \lim_{h \to 0} [\varphi(x + h) + \varphi(x - h)] \qquad (h > 0) \tag{196}$$

auferlegt.

§ 11. Die konstruktive Definition der stetigen Funktionen.

Nachdem wir festgestellt haben, daß es eine einheitliche Methode zur Konstruktion aller stetigen Funktionen in $\bar{J}$ gibt, welche außerdem bei Abänderung der Konstruktionsdetails jede in $\bar{J}$ stetige Funktion genau einmal liefert, können wir diese Merhode sogar zur Definition der in $\bar{J}$ stetigen Funktionen benutzen.

Definition. Eine Funktion $f(x)$ heiße dann und nur dann *stetig in* $\bar{J}$, wenn sie sich nach dem in § 7 angegebenen Einheitsverfahren konstruieren läßt.

Das ist eine konstruktive Definition der in $\bar{J}$ stetigen Funktionen; sie stellt sich neben die übliche deduktive Definition, welche besagt, daß eine Funktion $f(x)$ dann und nur dann in $\bar{J}$ stetig ist, wenn für ihren Stetigkeitsmodul $\omega(\delta)$ in $\bar{J}$ die Beziehung $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega(\delta) = 0$ gilt. Beide Definitionen ergänzen sich gegenseitig: während die deduktive logisch einfacher erscheint, wirkt die konstruktive anschaulicher und bildhafter.

Eingegangen 11. Februar 1955.

Berichtigung zu der Arbeit

Über die Darstellbarkeit von Modulformen durch Thetareihen.

Von *Martin Eichler* in Münster.

Die Begründung für die Anzahl der endlichen Koinzidenzpunkte in § 2 meiner in Band 195 dieses Journals, S. 156—171, erschienenen Arbeit ist folgendermaßen abzuändern:

Die Aussage auf S. 161, Z. 2 u. 3, ist falsch. Vielmehr ist N in einer solchen Ordnung durch Spur und Norm genau zweideutig festgelegt (nämlich bis auf einen Automorphismus des quadratischen Zahlkörpers $Z = k(N)$). Die beiden Matrizen N und $\overline{N} = \sigma - N$ mit der Spur σ und der Norm n liefern je einen Fixpunkt, und diese Fixpunkte liegen in verschiedenen Zweigen $\Gamma_0(q)N$, $\Gamma_0(q)\overline{N}$ der Korrespondenz τ_n. Eine Ausnahme liegt lediglich dann vor, wenn $\Gamma_0(q)N = \Gamma_0(q)\overline{N}$ ist, und das kann nur für $\sigma = 0$ eintreten.

Auf der anderen Seite gehört zu N und EN, wenn E eine Einheit des Ringes $\mathfrak{O} = \mathfrak{Q} \frown Z$ ist, derselbe Fixpunkt. Ist $W(\Delta)$ die Anzahl der Einheiten von $\mathfrak{O}$, so muß man also jedes N mit der Vielfachheit $W(\Delta)^{-1}$ zählen, um die richrige Fixpunktanzahl zu erhalten.

Beide Bemerkungen führen nun zu der behaupteten Anzahl der endlichen Koinzidenzpunkte

$$\sum_{\sigma, f} \prod_{p \mid q} \left(1 + \left\{\frac{\Delta}{p}\right\}\right) h(\Delta) \frac{2}{W(\Delta)} - \gamma_{n,0} = \sum_{\sigma, f} \prod_{p \mid q} \left(1 + \left\{\frac{\Delta}{p}\right\}\right) \frac{h(\Delta)}{w(\Delta)} - \gamma_{n,0}$$

mit $\Delta = (\sigma^2 - 4n) f^{-2}$. Dabei zählen auch die in elliptischen Ecken liegenden Fixpunkte mit der Multiplizität 1.

Eingegangen am 28. März 1956.

Zur Struktur gewisser Primzahlsätze *).

Von *Bernhard Hornfeck* in Berlin.

Den Ausgangspunkt der folgenden Untersuchungen bildet die Frage, welche Eigenschaften der Primzahlmenge

$$\mathfrak{P} = \{p_1, p_2, p_3, \ldots\} = \{1, 2, 3, 5, 7, \ldots\}^{1)}$$

beim Beweis gewisser Sätze der additiven Primzahltheorie wirklich benutzt werden; in vielen Fällen ergibt sich die Feststellung, daß vorwiegend die Teilerfremdheit ihrer Elemente und bestimmte *Dichteaussagen*, etwa der Primzahlsatz, in die Beweise eingehen. Eine Anzahl von Sätzen, bei denen nur dies der Fall ist, wird in der vorliegenden Arbeit daraufhin untersucht, welche allgemeineren Aussagen diese Tatsache zuläßt. Ähnliche Betrachtungen sind auch in anderen Teilen der Primzahltheorie möglich; sie haben eine zweifache Bedeutung: Erstens erlauben sie es, bekannte Sätze in einem wesentlich umfassenderen Rahmen zu formulieren; sie selbst erscheinen so als Sonderfälle einer allgemeinen Theorie. Zum zweiten gewinnt man auf diese Weise Einsichten in die Tragweite der verwendeten Methoden und kann unter Umständen ermessen, ob sie zur Lösung bisher ungeklärter Fragen überhaupt mit Erfolg benutzt werden können. In unserem Fall werden Grenzen der Brun-Rademacherschen Siebmethode deutlich, die zeigen, daß sie zur Bewältigung ihres ursprünglichen Problemkreises, nämlich des Zwillingsproblems der Primzahltheorie, nicht ausreichen kann.

Zur vorläufigen Formulierung einiger in den folgenden Paragraphen bewiesener Resultate bezeichnen wir mit $\mathfrak{Z}$ die Menge der nicht negativen ganzen Zahlen, mit $\mathfrak{Z}^{(k)}$ (k positiv, ganz) die Menge $\{0, 1, 2^k, 3^k, \ldots\}$ und mit $\mathfrak{R}$ die Schnirelmann-Summe $\mathfrak{P} + \mathfrak{Z}^{(k)}$ von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Z}^{(k)}$ [2]). Damit läßt sich unter Verwendung der Anzahlfunktion $R(x) = \sum_{0 < r \leq x,\, r \in \mathfrak{R}} 1$ von $\mathfrak{R}$ ein von Herrn N. P. Romanov in [1] bewiesener Satz in der Gestalt $\varliminf_{x \to \infty} \frac{R(x)}{x} > 0$ wiedergeben, d. h: $\mathfrak{R}$ *hat positive asymptotische Dichte*). In Satz 6 werden wir zeigen, daß die Aussage dieses Satzes richtig bleibt, wenn man $\mathfrak{P}$ durch eine beliebige Menge $\mathfrak{A} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ zueinander paarweise teilerfremder positiver ganzer Zahlen ersetzt, die wie die Primzahlmenge charakteristische $\frac{x}{\log x}$-Dichten (s. u.) hat; überdies kann an die Stelle von $\mathfrak{Z}^{(k)}$ eine Menge $\mathfrak{M}$ treten, die lediglich nach folgender Vorschrift gebildet ist: Man wähle eine beliebige Menge $\mathfrak{B}$, für deren Anzahl-

---

*) Diese Arbeit stellt einen Auszug aus der unter gleichem Titel von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Freien Universität Berlin angenommenen Dissertation (D 188) dar. — Für viele Hinweise gebührt Herrn Prof. Dr. H. Ostmann mein besonderer Dank.

1) Es ist in der additiven Zahlentheorie üblich, 1 als Primzahl zu betrachten.

2) $\mathfrak{R}$ ist also die Menge aller natürlichen Zahlen r, die sich in der Gestalt $r = p + n^k$ ($p \in \mathfrak{P}$, $n^k \in \mathfrak{Z}^{(k)}$) schreiben lassen.

funktion $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{B(x)}{x} > 0$ gilt, und ein ganzwertiges Polynom $f(x)$ mit positivem höchsten Koeffizienten; $\mathfrak{M} = {}_{\mathrm{Df}} f(\mathfrak{B})$ sei dann die Menge aller positiven $f(b_i)$, $b_i \in \mathfrak{B}$. Der Romanovsche Satz erscheint jetzt als Spezialfall des allgemeineren Satzes, daß $\mathfrak{A} + \mathfrak{M}$ *positive asymptotische Dichte* hat.

Eine entsprechende Verallgemeinerung erfährt ein zweiter Satz von Herrn Romanov [1], der aus dem ersten entsteht, wenn man dort $\mathfrak{R} = \mathfrak{P} + \{a^0, a^1, a^2, \ldots\}$ setzt (a positiv, ganz); dies geschieht in den Sätzen 9 und 11. Dieser letztere Satz umschließt dann gleichzeitig noch einen Satz von Herrn Kai-Lai Chung [2].

Es ist der Grundgedanke der folgenden Abschnitte, allgemein die Mengen $\mathfrak{A} = \{a_1, a_2, \ldots\}$ mit

$$(1) \qquad (a_i, a_j) = 1 \qquad (i \neq j;\ a_k \text{ positiv, ganz})$$

zu betrachten und sie von einem im wesentlichen dichte-theoretischen Standpunkt aus zu beschreiben; die Menge aller dieser Mengen heiße T.

Bei den Beweisen spielt die Übertragung eines Satzes über Primzahlpaare, der auf Herrn Brun [3] zurückgeht (s. a. Landau [4]), auf alle $\mathfrak{A} \in \mathsf{T}$ eine Rolle; sie läßt sich mühelos durchführen. Gleichzeitig aber sieht man, daß auch ähnliche Aussagen, die man bisher mit Hilfe der Brun-Rademacherschen Siebmethode über $\mathfrak{P} \in \mathsf{T}$ gewonnen hat, Aussagen über alle $\mathfrak{A} \in \mathsf{T}$ sind. Der Angabe solcher und anderer allgemeinerer Sätze über die Mengen $\mathfrak{A} \in \mathsf{T}$ ist § 1 gewidmet; dabei wird noch auf den zuletzt genannten Sachverhalt in Verbindung mit der Tragfähigkeit der Siebmethode einzugehen sein.

In § 2 stehen die Sätze 6 und 11, in denen die eingangs genannten als Sonderfälle enthalten sind, und es werden Folgerungen aus ihnen gezogen.

Der Beweis des in § 2 verwendeten Satzes 13 wird in § 3 geleistet. Er besagt im wesentlichen, daß die aus k Primfaktoren bestehenden ganzen Zahlen sich gleichmäßig auf die primen Restklassen nach einem beliebigen Modul m verteilen und verallgemeinert den Primzahlsatz für arithmetische Progressionen ($k = 1$).

Bezeichnungen und Definitionen.

Große deutsche Buchstaben bezeichnen stets Mengen nichtnegativer ganzer Zahlen; sie sollen nach wachsender Größe geordnet sein. Die Anzahlfunktion einer Menge $\mathfrak{M} = \{m_1, m_2, \ldots\}$ werde durch den entsprechenden großen lateinischen Buchstaben angegeben: $M(x) = \sum\limits_{0<m_i\leq x} 1$; nur die Anzahlfunktion von $\mathfrak{P}$ sei, wie es üblich ist, mit $\pi(x)$ bezeichnet.

Unter $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ werde die Menge aller möglichen Produkte aus zwei Faktoren verstanden, deren erster aus $\mathfrak{A}$ und deren zweiter aus $\mathfrak{B}$ stammt; entsprechend werde das Produkt mehrerer Mengen gebildet. Wir setzen noch $\mathfrak{A}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^2$ usw. $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ sei die Schnirelmann-Summe von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, d. i. die Menge aller möglichen Summen mit genau je einem Summanden aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, und wir schreiben $2\mathfrak{A}$ statt $\mathfrak{A} + \mathfrak{A}$ usw. Ist a eine positive ganze Zahl und $\mathfrak{M} = \{m_1, m_2, \ldots\}$, so bezeichne $a^{\mathfrak{M}}$ die Menge $\{a^{m_1}, a^{m_2}, \ldots\}$. $\mathfrak{M}^{(k)}$ sei die Menge aller k-ten Potenzen der Elemente von $\mathfrak{M}$ (k positiv, ganz).

$\delta^*(\mathfrak{A}) = \underline{\lim}\limits_{x\to\infty} \frac{A(x)}{x}$ ist die sogenannte *asymptotische*, $\bar{\delta}^*(\mathfrak{A}) = \overline{\lim}\limits_{x\to\infty} \frac{A(x)}{x}$ die *obere asymptotische Dichte* von $\mathfrak{A}$; ist $\delta^*(\mathfrak{A}) = \bar{\delta}^*(\mathfrak{A})$, so sagt man, $\mathfrak{A}$ habe die *natürliche Dichte* $\delta_*(\mathfrak{A}) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{A(x)}{x}$. Die (*finite* oder Schnirelmann-)Dichte einer Menge $\mathfrak{A}$ ist erklärt durch $\delta(\mathfrak{A}) = \inf\limits_{x=1,2,3,\ldots} \frac{A(x)}{x}$.

Wir verwenden den Begriff der *charakteristischen $\psi(x)$-Dichten* einer Menge $\mathfrak{M}$ in folgender Form (vgl. a. Ostmann [5]): Gilt für eine reelle Funktion $\psi(x)$, die von einer Stelle an für alle ganzen x erklärt ist und mit x gegen $+\infty$ strebt,

$$0 < \underline{\lim}_{x\to\infty} \frac{M(x)}{\psi(x)} \leqq \overline{\lim}_{x\to\infty} \frac{M(x)}{\psi(x)} < \infty,$$

so sagen wir, die $\psi(x)$-Dichten seien charakteristisch für $\mathfrak{M}$, oder $\mathfrak{M}$ habe charakteristische $\psi(x)$-Dichten.

Eine Teilmenge $\mathfrak{M}'$ aus $\mathfrak{M}$ heißt *in $\mathfrak{M}$ dicht*, wenn die $M(x)$-Dichten charakteristisch für $\mathfrak{M}'$ sind.

Die c_i sind positive Konstanten, $c_j(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ positive Funktionen von $t_1, t_2, \ldots, t_k$ allein. $\varphi(m)$ sei die Eulersche φ-Funktion (m positiv, ganz).

$\sim$ bedeute „asymptotisch gleich"; $\mathfrak{Q}$ sei die Menge der quadratfreien natürlichen Zahlen.

§ 1.

Den folgenden Betrachtungen sei ein Vergleich vorangestellt: $\mathfrak{A} = \{a_1, a_2, \ldots\}$ stamme aus T, und es bezeichne etwa p_i' den kleinsten Primfaktor von a_i[3]); wegen (1) ist die eineindeutige Zuordnung $a_i \leftrightarrow p_i' \in \mathfrak{P}$ möglich, wobei $\{p_1', p_2', \ldots\} \leqq \mathfrak{P}$ ist; aus $p_i' \leqq a_i$ schließt man

$$p_i \leqq a_i. \tag{2}$$

Unter allen $\mathfrak{A} \in \mathsf{T}$ ist $\mathfrak{P}$ also als die in gewisser Weise dichteste Menge charakterisiert, und für die natürliche Dichte $\delta_*(\mathfrak{A})$ eines $\mathfrak{A} \in \mathsf{T}$ folgt sofort

$$\delta_*(\mathfrak{A}) = 0. \tag{3}$$

Nun sei an den Begriff einer *rationalen Menge* erinnert: Eine Menge nicht negativer ganzer Zahlen heißt rational, wenn sie von einer Stelle an nur aus vollen Restklassen nach einem ganzen Modul m besteht. In Anlehnung an Herrn Volkmann [6] nennen wir eine Menge $\mathfrak{M}$ *pseudorational*, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ zwei rationale Mengen $\mathfrak{R}_\varepsilon$ und $\mathfrak{R}^\varepsilon$ so existieren, daß $\mathfrak{R}_\varepsilon \leqq \mathfrak{M} \leqq \mathfrak{R}^\varepsilon$ und $\delta_*(\mathfrak{R}^\varepsilon) - \delta_*(\mathfrak{R}_\varepsilon) < \varepsilon$ gilt.

Bekanntlich ist $\mathfrak{P}$ pseudorational (Buck [7]). Allgemeiner gilt darüber hinaus

Satz 1. *Alle $\mathfrak{A} \in \mathsf{T}$ sind pseudorational.*

Beweis. Wegen (3) können wir $\mathfrak{R}_\varepsilon = \{a\}$ mit einem beliebigen $a \in \mathfrak{A}$ nehmen; offenbar genügt es für den Beweis, noch zu zeigen, daß es eine Folge von Moduln m_λ gibt, für die $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \dfrac{\varphi(m_\lambda)}{m_\lambda} = 0$ ist; dazu braucht man aber nur etwa $m_\lambda = \prod\limits_{i=1}^{\lambda} p_i$ zu wählen.

Eine Verallgemeinerung von Satz 1 ist

Satz 2. *Stammen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_k$ aus T, so ist $\mathfrak{L} = \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 \cdots \mathfrak{A}_k$ pseudorational.*

Beweis. Wir führen den Beweis zunächst für den Spezialfall $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 = \cdots = \mathfrak{A}_k = \mathfrak{P}$, also für $\mathfrak{L} = \mathfrak{P}^k$. Zunächst ist mit $0 < \delta < 1$

$$\sum_{\substack{n \leqq x \\ n \in \mathfrak{P}^k}} \frac{1}{n} = \int_{1-\delta}^{x} \frac{dP^k(t)}{t} = \frac{P^k(x)}{x} + \int_{1-\delta}^{x} \frac{P^k(t)}{t^2}\, dt$$

[3]) Primteiler bzw. Primfaktoren sollen hier und im folgenden immer von 1 verschieden sein.

oder (für $x \to \infty$)

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \in \mathfrak{P}^k}} \frac{1}{n} \sim \frac{(\log\log x)^{k-1}}{(k-1)!\log x} + \int_{1-\delta}^{x} \frac{(\log\log t)^{k-1}}{(k-1)!\, t \log t}\, dt^{4)},$$

also

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \in \mathfrak{P}^k}} \frac{1}{n} \sim \frac{1}{k!} (\log\log x)^k = o(\log x). \tag{4}$$

Es ist $\delta_*(\mathfrak{P}^k) = 0$; wir wählen also $\mathfrak{R}_\varepsilon = \{l\}$ mit einem beliebigen $l \in \mathfrak{L}$ und können uns im folgenden darauf beschränken, eine Folge von Moduln m_λ anzugeben, für die höchstens $h(m_\lambda) = o(m_\lambda)$ Restklassen unendlich viele Elemente aus $\mathfrak{P}^k$ enthalten. Wir zeigen, daß $m_\lambda = \prod_{i=1}^{\lambda} p_i$ gewählt werden kann.

Für dieses m_λ kommen als solche Restklassen, die unendlich viele Elemente aus $\mathfrak{P}^k$ enthalten, in Frage: Alle $\varphi(m_\lambda)$ primen Restklassen, alle $\varphi\left(\frac{m_\lambda}{p_i}\right)$ Restklassen, deren Elemente mit m_λ den größten gemeinschaftlichen Teiler p_i haben ($i = 1, 2, \ldots, \lambda), \ldots$, alle $\varphi\left(\frac{m_\lambda}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k}}\right)$ Restklassen, deren Elemente mit m_λ einen aus k verschiedenen Primfaktoren bestehenden g. g. T. haben. Insgesamt erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{h(m_\lambda)}{m_\lambda} &= \frac{1}{m_\lambda}\left\{\varphi(m_\lambda) + \sum_{i \leq \lambda} \varphi\left(\frac{m_\lambda}{p_i}\right) + \sum_{i_1 < i_2 \leq \lambda} \varphi\left(\frac{m_\lambda}{p_{i_1} p_{i_2}}\right) + \cdots + \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq \lambda} \varphi\left(\frac{m}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k}}\right)\right\} \\
&= \prod_{i \leq \lambda}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right) + \sum_{i \leq \lambda}\left[\frac{1}{p_i} \prod_{\substack{\varrho \leq \lambda \\ \varrho \neq i}}\left(1 - \frac{1}{p_\varrho}\right)\right] + \sum_{i_1 < i_2 \leq \lambda}\left[\frac{1}{p_{i_1} p_{i_2}} \prod_{\substack{\varrho \leq \lambda \\ \varrho \neq i_1 \\ \varrho \neq i_2}}\left(1 - \frac{1}{p_\varrho}\right)\right] + \cdots \\
&= \prod_{i \leq \lambda}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\left\{1 + \sum_{i \leq \lambda} \frac{1}{p_i\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)} + \sum_{i_1 < i_2 \leq \lambda} \frac{1}{p_{i_1} p_{i_2}\left(1 - \frac{1}{p_{i_1}}\right)\left(1 - \frac{1}{p_{i_2}}\right)} + \cdots\right\} \\
&= \prod_{i \leq \lambda}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\left\{1 + \sum_{i \leq \lambda} \frac{1}{p_i - 1} + \sum_{i_1 < i_2 \leq \lambda} \frac{1}{(p_{i_1} - 1)(p_{i_2} - 1)} + \cdots \right. \\
&\qquad \left. + \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq \lambda} \frac{1}{(p_{i_1} - 1)(p_{i_2} - 1) \cdots (p_{i_k} - 1)}\right\}.
\end{aligned}$$

Die letzte geschweifte Klammer enthält $k + 1$ Summanden, deren jeder nach (4) ein $o(\log p_\lambda)$ ist; wegen

$$\prod_{\substack{r \leq p_\lambda \\ r \in \mathfrak{P}}}\left(1 - \frac{1}{p}\right) \sim \frac{e^{-\gamma}}{\log p_\lambda} \qquad (\gamma \text{ die Eulersche Konstante}) \tag{5}$$

folgt also die Behauptung

$$\frac{h(m_\lambda)}{m_\lambda} = o(\log p_\lambda)\frac{e^{-\gamma}}{\log p_\lambda} = o(1). \tag{6}$$

---

4) Es ist $P^k(x) \sim \frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{x}{\log x} \cdot (\log\log x)^{k-1}$; vgl. etwa [8], § 56.

Damit ist der Fall $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 = \cdots = \mathfrak{A}_k = \mathfrak{P}$ erledigt. Den allgemeinen Fall behandelt man nach diesem Vorbild; man wählt das gleiche m_λ und zählt die in Frage kommenden Restklassen in folgender Weise ab: Alle $\varphi(m_\lambda)$ primen Restklassen; alle $\varphi\left(\frac{m_\lambda}{\alpha_{i1}}\right)$ Restklassen, deren Elemente mit m_λ den g. g. T. $\alpha_{i1}, \alpha_{i1} \mid a_{i1} \in \mathfrak{A}_1$, haben, alle $\varphi\left(\frac{m_\lambda}{\alpha_{i2}}\right)$ Restklassen, deren Elemente mit m_λ den g. g. T. $\alpha_{i2}, \alpha_{i2} \mid a_{i2} \in \mathfrak{A}_2$, haben, ..., alle $\varphi\left(\frac{n_\lambda}{\alpha_{ik}}\right)$ Restklassen, deren Elemente mit m_λ den g. g. T. $\alpha_{ik}, \alpha_{ik} \mid a_{ik} \in \mathfrak{A}_k$, haben (das sind zusammen weniger als $k \sum_{i \leq \lambda} \varphi\left(\frac{m_\lambda}{p_i}\right)$ Restklassen); alle $\varphi\left(\frac{m_\lambda}{\alpha_{i1}\alpha_{i2}}\right)$ Restklassen, deren Elemente mit m_λ den g. g. T. $\alpha_{i1}\alpha_{i2}$ haben, ... (das sind zusammen weniger als $\binom{k}{2} \sum_{i_1 < i_2 \leq \lambda} \varphi\left(\frac{m_\lambda}{p_{i_1} p_{i_2}}\right)$ Restklassen); usw. Für das neue $h(m_\lambda)$ ergibt sich dann wie oben die Behauptung $h(m_\lambda) = o(m_\lambda)$.

Wichtig ist für das Folgende der

Satz 3. *Es sei $\mathfrak{A} \in \mathsf{T}$ und $A_\nu^*(x)$ die Anzahl aller der $a_i \leqq x$, $a_i \in \mathfrak{A}$, die aus ν oder mehr (entsprechend ihrer Vielfachheit gezählten) Primfaktoren bestehen. Dann gilt*

$$A_\nu^*(x) = o\left(x^{\frac{1}{\nu}}\right). \tag{7}$$

Beweis. Jedes der in $A_\nu^*(x)$ gezählten a_k werde als Primzahlprodukt $a_k = p_1' p_2' \cdots p_\mu'$, $\mu \leqq \nu$, $p_i' \leqq p_j'$ für $i < j$, geschrieben; die Zuordnung $a_k \longleftrightarrow p_1'$ der a_k zu einer Teilmenge von $\mathfrak{P}$ ist wegen (1) eineindeutig; aus $x \geqq a_k \geqq (p_1')^\nu$ oder $p_1' \leqq x^{\frac{1}{\nu}}$ folgt also $A_\nu^*(x) \leqq \pi\left(x^{\frac{1}{\nu}}\right) = o\left(x^{\frac{1}{\nu}}\right)$.

Damit ergibt sich sofort der

Satz 4. *Sei $\mathfrak{A} \in \mathsf{T}$, d eine positive ganze Zahl und $A(x; 0, d)$ die Anzahl aller derjenigen $a_i \leqq x$, $a_i \in \mathfrak{A}$, für die auch $a_i + d = a_j \in \mathfrak{A}$ ist. Dann gilt gleichmäßig in d*

$$A(x; 0, d) < c_1 \frac{x}{\log^2 x} \sum_{\substack{q \mid d \\ q \in \mathfrak{L}}} \frac{1}{q}. \tag{8}$$

Beweis. Der Satz ist richtig, wenn $\mathfrak{A}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{P}$ ist (Brun [3] s. a. Landau [4], Satz 88); setzt man $\nu = 2$ in Satz 3, so erhält man demnach

$$A(x; 0, d) < c_2 \frac{x}{\log^2 x} \sum_{\substack{q \mid d \\ q \in \mathfrak{L}}} \frac{1}{q} + c_3 \sqrt{x} < c_1 \frac{x}{\log^2 x} \sum_{\substack{q \mid d \\ q \in \mathfrak{P}}} \frac{1}{q}.$$

Bekanntlich war es eines der ursprünglichen Anliegen der Brun-Rademacherschen Siebmethode, die Frage zu lösen, ob es zu einer geraden Zahl d unendlich viele Primzahlen p gibt, für die auch $p + d = p'$ wieder Primzahl ist. Die Abschätzung (8) von $\pi(x; 0, d)$ nach oben, die vermutlich schon die wahre Größenordnung erreicht [5]), ist aber, wie Satz 4 zeigt, von viel allgemeinerer Gültigkeit. Beim Beweis von Satz 4 wird wesentlich nur $\pi(x) = o(x)$ in Form von Satz 3 benutzt, eine Aussage, die man durch eine leichte Sieb-

[5]) Wahrscheinlichkeitstheoretische Ansätze lassen

$$\pi(x; 0, d) \sim 2 \prod_{p > 2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \cdot \prod_{\substack{p \mid d \\ p > 2}} \left(1 - \frac{1}{p-1}\right)^{-1} \cdot \frac{x}{\log^2 x} = 1{,}320 \cdots \prod_{\substack{p \mid d \\ p > 2}} \frac{p-1}{p-2} \cdot \frac{x}{\log^2 x} \qquad (p \in \mathfrak{P})$$

erwarten. Vgl. hierzu *E. Ullrich*, Zum Zwillingssatz von Viggo Brun, Ber. Math.-Tagung Tübingen 1946.

betrachtung beweisen kann. Dies zeigt die Struktur des Siebverfahrens: Es ist anwendbar auf alle Mengen $\mathfrak{A} \in \mathsf{T}$ und kann deshalb in bezug auf ein spezielles $\mathfrak{P} \in \mathsf{T}$ keine schärferen Resultate liefern; beispielsweise erhält man ja für die Menge $\mathfrak{Y} \in \mathsf{T}$, die aus $\mathfrak{P}$ durch Streichen aller Primzahlzwillinge entsteht, in (8) auch nur die obere Abschätzung $Y(x; 0, 2) < c_4 \dfrac{x}{\log x}$, während doch $Y(x; 0, 2) = 0$ ist. Diese Überlegungen machen auf eine andere Weise das Ergebnis von Herrn A. Selberg [9] verständlich, daß das Zwillingsproblem nicht mit Siebmethoden gelöst werden kann. Nur dann, wenn von der Primzahlmenge $\mathfrak{P}$ Eigenschaften herangezogen werden, die sie innerhalb T auszeichnen und etwa auch von $\mathfrak{Y}$ unterscheiden lassen, kann man erwarten, zu weiteren Resultaten zu gelangen.

In Richtung von Satz 4 gilt noch der

Satz 5. *Sei $\mathfrak{A} \in \mathsf{T}$ und seien $d_1 = 0 < d_2 < \cdots < d_k$ irgendwelche ganze Zahlen und $A(x; d_1, d_2, \ldots, d_k)$ die Anzahl aller derjenigen $a_i \leqq x$, $a_i \in \mathfrak{A}$, für die auch die Zahlen $a_i + d_\lambda$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, k)$ Elemente von $\mathfrak{A}$ sind. Dann ist*

$$A(x; d_1, d_2, \ldots, d_k) < c_5(k, d_1, d_2, \ldots, d_k) \frac{x}{\log^k x}. \tag{9}$$

Der *Beweis* entspricht dem von Satz 4; für $\mathfrak{A} \leqq \mathfrak{P}$ vgl. Knödel [10].

§ 2.

Im folgenden werden Sätze über die asymptotische Dichte gewisser Summenmengen ausgesprochen. Durch Hinzunahme der Elemente 0 und 1 zu den Summanden kann man die gleichen Aussagen über deren finite Dichte formulieren.

1. Es sei $f(x) = \sum_{\nu=0}^{m} f_\nu x^\nu$ ein beliebiges ganzwertiges Polynom mit $f_m > 0$; mit den schon eingeführten Bezeichnungen gilt dann

Satz 6. *$\mathfrak{A}$ stamme aus T und habe charakteristische $\dfrac{x}{\log x}$-Dichten; $\mathfrak{B}$ sei eine Menge mit charakteristischen x-Dichten. Dann gilt*

$$\delta^*(\mathfrak{A} + f(\mathfrak{B})) > 0.$$

Beweis (in Anlehnung an Landau [4], Beweis zu Satz 103). Es sei $\mathfrak{A} = \{a_1, a_2, \ldots\}$, $\mathfrak{B} = \{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$; wegen $f_m > 0$ stimmt $f(\mathfrak{B}) = \{b_1, b_2, \ldots\}$ von einer Stelle an mit $\{f(\beta_1), f(\beta_2), \ldots\}$ überein. Weiter seien $D(u)$ bzw. $F(u)$ die Lösungsanzahlen von $u = a_i - a_j$ für $a_i \leqq x$, $a_j \leqq x$ bzw. $u = b_i - b_j$ für $b_i \leqq x$, $b_j \leqq x$ mit einem fest gewählten $x \geqq 2$; $S(x)$ sei die Lösungsanzahl von $a_i + b_j \leqq x$; $R(y)$ sei die Anzahlfunktion von $\mathfrak{R} = \mathfrak{A} + f(\mathfrak{B})$, also $R(x)$ die Anzahl der verschiedenen $v \leqq x$ der Form $v = a_i + b_j$, so daß nach Landau [4], Satz 99 gilt

$$S^2(x) \leqq R(x) \left[S(x) + 2 \sum_{u=1}^{x} D(u) \cdot F(u) \right];$$

man sieht leicht, daß diese Ungleichung richtig bleibt, wenn $S(x)$ durch $T(x)$, $0 < T(x) \leqq S(x)$, ersetzt wird:

$$T^2(x) \leqq R(x) \left[T(x) + 2 \sum_{u=1}^{x} D(u) \cdot F(u) \right]. \tag{10}$$

Anwendung von Satz 4 liefert

$$T^2(x) \leqq R(x) \left[T(x) + c_6 \frac{x}{\log^2 x} \sum_{u=1}^{x} \left\{ \sum_{\substack{q \mid u \\ q \in \mathfrak{Q}}} \frac{1}{q} \right\} F(u) \right]. \tag{11}$$

Ist $C(q)$ die Lösungsanzahl von $b_i - b_j \equiv 0(q)$, $b_j < b_i \leqq x$, so wird

$$\sum_{u=1}^{x} \left\{ \sum_{\substack{q \mid u \\ q \in \mathfrak{Q}}} \frac{1}{q} \right\} F(u) = \sum_{\substack{q=1 \\ q \in \mathfrak{Q}}}^{x} \frac{1}{q} \sum_{\substack{u=1 \\ u \equiv 0(q)}}^{x} F(u) = \sum_{\substack{q=1 \\ q \in \mathfrak{Q}}}^{x} \frac{C(q)}{q},$$

und wir schreiben statt (11)

$$T^2(x) \leqq R(x) \left[T(x) + c_6 \frac{x}{\log^2 x} \sum_{\substack{q=1 \\ q \in \mathfrak{Q}}}^{x} \frac{C(q)}{q} \right]. \tag{12}$$

Über die Anzahlfunktion $B_f(x)$ von $f(\mathfrak{B})$ gilt für $x \geqq x_0$

$$c_7 x^{\frac{1}{m}} \leqq B_f(x) \leqq c_8 x^{\frac{1}{m}}; \tag{13}$$

deshalb haben wir für $x \geqq x_0$ auf Grund unserer Voraussetzungen über $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$

$$S(x) = \sum_{a_i + b_j \leqq x} 1 \geqq \sum_{a_i \leqq \frac{x}{2}} 1 \cdot \sum_{b_j \leqq \frac{x}{2}} 1 > c_9 \cdot \frac{x^{1+\frac{1}{m}}}{\log x}$$

und setzen

$$T(x) = c_9 \cdot \frac{x^{1+\frac{1}{m}}}{\log x}. \tag{14}$$

$\{\beta_1^*, \beta_2^*, \ldots\}$ sei die Teilmenge aller der Elemente aus $\mathfrak{B}$, für die $f(\beta_i^*) \in f(\mathfrak{B})$ ist. Die Lösungsanzahl $C(q)$ von

$$\sum_{\nu=0}^{m} f_\nu (\beta_i^*)^\nu - \sum_{\lambda=0}^{m} f_\lambda (\beta_j^*)^\lambda \equiv 0(q), \quad x \geqq \sum_{\nu=0}^{m} f_\nu (\beta_i^*)^\nu > \sum_{\lambda=1}^{m} f_\lambda (\beta_j^*)^\lambda > 0, \quad q \in \mathfrak{Q}, \tag{15}$$

wird wie folgt abgeschätzt: Die Kongruenz

$$\sum_{\nu=0}^{m} f_\nu (\beta_i^*)^\nu - \sum_{\lambda=0}^{m} f_\lambda (\beta_j^*)^\lambda \equiv 0(p), \quad p \in \mathfrak{P},$$

hat bei festem β_j^* höchstens m Lösungen mod p; also hat (15) bei festem β_j^* höchstens $m^{\nu(q)}$ Lösungen mod q, wobei $\nu(q)$ die Anzahl der von 1verschiedenen Primteiler von q ist. Bei festgehaltenem β_j^* hat demnach (15)wegen $q \leqq x$ höchstens insgesamt

$$\left(\left[c_{10} \cdot \frac{x^{\frac{1}{m}}}{q} \right] + 1 \right) m^{\nu(q)} \leqq c_{11} x^{\frac{1}{m}} \cdot \frac{m^{\nu(q)}}{q^{\frac{1}{m}}}$$

Lösungen $\beta_i^* \leqq x$; nach (13) folgt hieraus für $x \geqq x_0$

$$C(q) \leqq c_{12} \cdot x^{\frac{2}{m}} \cdot \frac{m^{\nu(q)}}{q^{\frac{1}{m}}}. \tag{16}$$

Es handelt sich darum, $\sum_{\substack{q=1 \\ q \in \mathfrak{Q}}}^{x} \frac{C(q)}{q}$ in (12) abzuschätzen. Nun konvergiert

$$\sum_{\substack{q=1 \\ q \in \mathfrak{Q}}}^{\infty} \frac{m^{\nu(q)}}{q^{1+\frac{1}{m}}} = \prod_{\substack{p \in \mathfrak{P} \\ p \neq 1}} \left(1 + \frac{m}{p^{1+\frac{1}{m}}} \right) < c_{13}(m).$$

Also ist

$$\sum_{\substack{q=x\\ q\in\mathfrak{L}}} \frac{C(q)}{q} \leqq c_{14}(m)\cdot x^{\frac{2}{m}}, \tag{17}$$

und (12), (14) und (17) liefern für $x \geqq x_0$

$$c_9^2\cdot\frac{x^{2+\frac{2}{m}}}{\log^2 x} \leqq R(x)\left[c_9\frac{x^{1+\frac{1}{m}}}{\log x} + c_{14}(m)\cdot\frac{x^{1+\frac{2}{m}}}{\log^2 x}\right],$$

also die Behauptung

$$R(x) \geqq c_{15}(m)\cdot x \qquad (x \geqq x_0). \tag{18}$$

Spezialfälle von Satz 6 ergeben sich, wenn man etwa für $\mathfrak{A}$ die Menge aller Primzahlen einer primen Restklasse mod m_1, für $\mathfrak{B}$ die positiven Elemente einer Restklasse mod m_2 und für $f(x)$ spezielle ganzwertige Polynome, z. B. $f(x) = x^m$, wählt. Mit $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{Z}$ und $f(x) = x^m$ erhält man den schon eingangs erwähnten Romanovschen Satz. Charakteristisch für Satz 6 ist, daß neben der Bedingung (1) zur Kennzeichnung der Mengen nur Dichterelationen herangezogen werden, wobei der numerische Wert der Dichten belanglos ist. Darüber hinaus wurde auch die Eigenschaft (1) der Elemente von $\mathfrak{A} \in \mathsf{T}$ nur in der Gestalt von (8) benutzt. Satz 6 gilt also auch, wenn man statt $\mathfrak{A} \in \mathsf{T}$ eine Menge $\mathfrak{A}'$ mit charakteristischen $\frac{x}{\log x}$-Dichten wählt, für die (8) erfüllt ist; man kann solche $\mathfrak{A}'$ konstruieren durch Abänderung der $\mathfrak{A} \in \mathsf{T}$ mit charakteristischen $\frac{x}{\log x}$-Dichten; ihre allgemeine Struktur ist jedoch schwer zu überschauen. Vermutlich genügt es auch, von $\mathfrak{B}$ nur charakteristische $\frac{x}{\log x}$-Dichten zu verlangen.

2. Ist $a \geqq 2$ eine feste ganze Zahl und $\mathfrak{G} = \{a^0, a^1, a^2, \ldots\}$, so gilt für die Anzahlfunktion $H(x)$ von $\mathfrak{H} = \mathfrak{P} + \mathfrak{G}$ die triviale obere Abschätzung $H(x) \leqq \pi(x)\cdot G(x)$ oder

$$H(x) \leqq c_{16}\cdot\frac{x}{\log x}\cdot c_{17}\cdot\log x = c_{18}\cdot x \qquad (x \geqq x_0(a)).$$

Daß dies zugleich die wahre Größenordnung von $H(x)$ ist, besagt der tiefer liegende

Satz 7 (N. P. Romanov [1]); s. a Landau [4], Satz 106).

$$\delta^*(\mathfrak{P} + \mathfrak{G}) > 0.$$

Die von Herrn Romanov benutzte Beweismethode liefert für $\mathfrak{G}^* \leqq \mathfrak{G}$ leicht

Satz 8 (Prachar [11]).

$$H^*(x) > c_{19}\cdot\frac{xG^*(x)}{\log x} \qquad (\mathfrak{H}^* = \mathfrak{P} + \mathfrak{G}^*,\ x \geqq x_0(a)).$$

Verfolgt man die Beweismethode, so sieht man, daß von $\mathfrak{P}$ nur die Eigenschaft (8) in Verbindung mit der Tatsache benutzt wurde, daß die $\frac{x}{\log x}$-Dichten charakteristisch für $\mathfrak{P}$ sind. Deshalb gilt der die Sätze 7 und 8 umfassende

Satz 9. *Es sei $\mathfrak{A} \in \mathsf{T}$, die $\frac{x}{\log x}$-Dichten seien charakteristisch für $\mathfrak{A}$, $a \geqq 2$ sei ganz und $\mathfrak{G}^* \leqq \{a^0, a^1, a^2, \ldots\}$; dann gilt mit $\mathfrak{H}^* = \mathfrak{A} + \mathfrak{G}^*$ für $x \geqq x_0(a)$*

$$H^*(x) > c_{20}\cdot\frac{xG^*(x)}{\log x}.$$

3. Verwandt zu Satz 7 ist

Satz 10. (Kai-Lai Chung [2]). $\delta^*(\mathfrak{P}^2 + a^{\mathfrak{P}}) > 0$.

Auch dieser im wesentlichen mit den Romanovschen Methoden bewiesene Satz liegt tiefer: $\mathfrak{P}^2$ hat charakteristische $\frac{\log x}{x \log\log x}$-Dichten, $a^{\mathfrak{P}}$ charakteristische $\frac{\log x}{\log\log x}$-Dichten; auch hier wird also die Größenordnung der trivialen Abschätzung erreicht. Die Struktur dieses Satzes zeigt

Satz 11. *Die $\mathfrak{A}_\lambda$ seien Mengen aus T mit charakteristischen $\frac{x}{\log x}$-Dichten ($\lambda = 1, 2, \ldots, k$); $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \cdots \mathfrak{A}_k$ sei gleich $\mathfrak{L}$ gesetzt; $\mathfrak{M} = \{m_1, m_2, \ldots\}$ sei eine Menge mit charakteristischen $\frac{x}{\log^{k-1} x}$-Dichten und erfülle für $k > 1$ die Bedingung*

$$\sum_{\substack{m_i \leqq x \\ m_i + d \in \mathfrak{M}}} 1 \leqq c_{21} \frac{x}{\log^k x} \sum_{\substack{q \mid d \\ q \in \mathfrak{Q}}} \frac{1}{q}. \tag{19}$$

Dann gilt für jede in $\mathfrak{L}$ dichte Teilmenge $\mathfrak{L}^*$

$$\delta^*(\mathfrak{L}^* + a^{\mathfrak{M}}) > 0\,^{6)}.$$

Bemerkung. Für $k = 1$ ergibt sich ein Spezialfall von Satz 9; für $k = 2$, $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{M} = \mathfrak{P}$ und $\mathfrak{L}^* = \mathfrak{P}^2$ erhält man Satz 10. Bedingung (19) ist ein Analogon zu Bedingung (8); ist $k = 2$, so kann also eine Menge $\mathfrak{A} \in \mathsf{T}$ mit charakteristischen $\frac{x}{\log x}$-Dichten für $\mathfrak{M}$ genommen werden.

Beweis von Satz 11. Wir verfolgen die wesentlichen Beweisschritte an Hand der Arbeit von Herrn Kai-Lai Chung [2] und können uns auf die Struktur des Beweises beschränken.

a) Das „*Main Lemma*" in [2] lautet: *The number of solutions of*

$$y = \pi p - \pi' p', \quad \pi p \leqq x, \quad \pi < p, \quad \pi' < p'$$

is for $y \geqq 1$, $x \geqq 2$ at most

$$c_4 \frac{x}{\log^2 x} (\log\log x)^2 \sum_{\substack{q \mid y \\ q \in \mathfrak{Q}}} \frac{1}{q}.$$

(Dabei sind p, p', π, π' Primzahlen.) Für unsere Zwecke brauchen wir das „Main Lemma" zunächst in der Form

$$P^k(x; 0, d) < c_{22} \frac{x}{\log^2 x} \cdot (\log\log x)^k \sum_{\substack{q \mid d \\ q \in \mathfrak{Q}}} \frac{1}{q},$$

die man genau so wie den Chungschen Spezialfall $k = 2$ beweist. Das läßt sich in nun schon bekannter Weise erweitern:

$$L^*(x; 0, d) < c_{23} \frac{x}{\log^2 x} \cdot (\log\log x)^k \sum_{\substack{q \mid d \\ q \in \mathfrak{Q}}} \frac{1}{q}. \tag{20}$$

---

[6]) Wieder prüft man leicht nach, daß die Größenordnung der trivialen Abschätzung der Anzahlfunktion von $\mathfrak{R} = \mathfrak{L}^* + a^{\mathfrak{M}}$ nach oben erreicht wird: Die $\frac{x(\log\log x)^{k-1}}{\log x}$-Dichten sind charakteristisch für $\mathfrak{L}^*$, wie im Beweis gezeigt wird, und $a^{\mathfrak{M}}$ hat charakteristische $\frac{\log x}{(\log\log x)^{k-1}}$-Dichten.

b) Wir setzen $\mathfrak{L}^* = \{a_1, a_2, \ldots\}$, $a^{\mathfrak{M}} = \{b_1, b_2, \ldots\}$ und übertragen die Bezeichnungen $R(x)$, $S(x)$, $T(x)$ und $F(u)$ aus dem Beweise zu Satz 6 auf den vorliegenden Fall; das der Relation (11) entsprechende „Lemma 3" in [2] folgt sofort aus dem „Main Lemma" und nimmt für uns die Gestalt

$$T^2(x) < c_{24} R(x) \left[T(x) + \frac{x(\log\log x)^k}{\log^2 x} \sum_{u=1}^{x} \left\{ \sum_{\substack{q \mid u \\ q \in \mathfrak{L}}} \frac{1}{q} \right\} F(u) \right] \tag{21}$$

an; dabei wird (20) an Stelle des „Main Lemma" benutzt.

c) Wir wählen $x \geqq x_0(a)$ und haben $R(x) > c_{25} x$ zu zeigen. Unter der vorläufigen Annahme, die $\frac{x(\log\log x)^{k-1}}{\log x}$-Dichten seien charakteristisch für $\mathfrak{L}^*$ (dieser Nachweis folgt unter d)), findet man zunächst

$$S(x) = \sum_{a_i + b_j \leq x} 1 \geqq \sum_{a_i \leq \frac{x}{2}} 1 \cdot \sum_{b_j \leq \frac{x}{2}} 1,$$

$$S(x) > c_{26} \frac{x(\log\log x)^{k-1}}{\log x} \cdot c_{27}(a) \frac{\log x}{(\log\log x)^{k-1}} = c_{28}(a)\, x$$

und setzt $T(x) = c_{28}(a) \cdot x$. Setzt man $\sum_{\substack{q \mid u \\ q \in \mathfrak{L}}} \frac{1}{q} = g(u)$, schreibt

$$\sum_{u=1}^{x} g(u) \cdot F(u) = \sum_{m_i < m_j \leq \frac{\log x}{\log a}} g(a^{m_j} - a^{m_i})$$

und beachtet

$$g(a^{m_j} - a^{m_i}) = g\{a^{m_j}(a^{m_i - m_j} - 1)\} = g(a^{m_j})\, g(a^{m_j - m_i} - 1) = g(a) \cdot g(a^{m_j - m_i} - 1),$$

so erhält man unter Berücksichtigung von (19)

$$\sum_{u=1}^{x} g(u) \cdot F(u) = g(a) \cdot \sum_{0 < d \leq \frac{\log x}{\log a}} g(a^d - 1) \cdot \sum_{m_i < m_j \leq \frac{\log x}{\log a}} 1$$

$$= g(a) \cdot \sum_{0 < d \leq \frac{\log x}{\log a}} g(a^d - 1) \cdot c_{29}(a) \frac{\log x}{(\log\log x)^k} \sum_{\substack{q \mid d \\ q \in \mathfrak{L}}} \frac{1}{q}.$$

Der weitere Teil der Abschätzung von $\sum_{u=1}^{x} g(u) \cdot F(u)$ verläuft wörtlich wie in [2]; man hat nur $(\log\log x)^k$ statt $(\log\log x)^2$ zu schreiben. Also wird

$$\sum_{u=1}^{x} g(u) \cdot F(u) = \sum_{u=1}^{x} \left\{ \sum_{\substack{q \mid u \\ q \in \mathfrak{L}}} \frac{1}{q} \right\} F(u) < c_{30}(a) \frac{\log^2 x}{(\log\log x)^k}. \tag{22}$$

Wir hatten $T(x) = c_{28}(a) \cdot x$; setzt man dies und (22) in (21) ein, so folgt die Behauptung

$$R(x) > c_{25}(a) \cdot x \qquad (x \geqq x_0(a)). \tag{23}$$

Wir haben aber noch nachzuweisen, daß die $\frac{x(\log\log x)^{k-1}}{\log x}$-Dichten charakteristisch für $\mathfrak{L}^*$ sind.

d) Wir müssen

$$\sum_{a_i \leq x} 1 \geqq c_{31} \frac{x}{\log x} (\log\log x)^{k-1} \tag{24}$$

zeigen und führen den Nachweis durch Induktion nach k. Für $k = 1$ ist (24) richtig; nehmen wir (24) für $k = n$ als richtig an. Wegen Satz 3 genügt es, den Induktionsbeweis für die Mengen $\tilde{\mathfrak{A}}_\lambda$ aller Primzahlen aus $\mathfrak{A}_\lambda$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, n+1)$ zu führen. Sei $\tilde{\mathfrak{A}}_1 \tilde{\mathfrak{A}}_2 \cdots \tilde{\mathfrak{A}}_n = \mathfrak{B}$, $\tilde{\mathfrak{A}}_1 \tilde{\mathfrak{A}}_2 \cdots \tilde{\mathfrak{A}}_{n+1} = \mathfrak{W} = \{w_1, w_2, \ldots\}$. Dann ist nach Induktionsvoraussetzung $(0 < \delta < 1)$

$$W(x) = \sum_{w_i \leq x} 1 \geqq \frac{1}{n+1} \int_{t=1+\delta}^{x-\delta} V\left(\frac{x}{t}\right) d\tilde{A}_{n+1}(t)$$

$$\geqq \frac{1}{n+1} \cdot c_{32} \int_{1+\delta}^{x-\delta} \frac{\frac{x}{t}}{\log \frac{x}{t}} \left(\log\log \frac{x}{t}\right)^{n-1} d\tilde{A}_{n+1}(t)$$

$$\geqq \frac{c_{32} x}{n+1} \cdot \left\{ \tilde{A}_{n+1}(t) \frac{1}{t \log \frac{x}{t}} \left(\log\log \frac{x}{t}\right)^{n-1} \Bigg|_{1+\delta}^{x-\delta} \right.$$

$$\left. + \int_{1+\delta}^{x-\delta} \tilde{A}_{n+1}(t) \left[\frac{\left(\log\log \frac{x}{t}\right)^{n-1} \log \frac{x}{t} + (n-1)\left(\log\log \frac{x}{t}\right)^{n-2} - \left(\log\log \frac{x}{t}\right)^{n-1}}{t^2 \left(\log \frac{x}{t}\right)^2} \right] dt \right\}$$

oder

$$W(x) = c_{33} x \cdot (D_1 + D_2),$$

worin

$$D_1 \leqq c_{34} \frac{t}{\log t} \cdot \frac{1}{t \log \frac{x}{t}} \left(\log\log \frac{x}{t}\right)^{n-1} \Bigg|_{1+\delta}^{x-\delta} = o\left(\frac{(\log\log x)^n}{\log x}\right),$$

also auch

$$W(x) \geqq c_{35} x \left[D_2 + o\left(\frac{(\log\log x)^n}{\log x}\right) \right] \tag{25}$$

ist. Wir schätzen D_2 ab. Es ist

$$D_2 \geqq c_{36} \left\{ \int_{1+\delta}^{x-\delta} \frac{\left(\log\log \frac{x}{t}\right)^{n-1}}{t \log t \cdot \log \frac{x}{t}} dt + \int_{1+\delta}^{x-\delta} \frac{\left(\log\log \frac{x}{t}\right)^{n-2}}{t \left(\log \frac{x}{t}\right)^2 \log t} dt - \int_{1+\delta}^{x-\delta} \frac{\left(\log\log \frac{x}{t}\right)^{n-1}}{t \left(\log \frac{x}{t}\right)^2 \log t} dt \right\}$$

$$= c_{36} \{I_1 + I_2 - I_3\}.$$

Hierin ist

$$I_2 = I_2(x) \leqq (\log\log x)^{n-2} \int_{1+\delta}^{x-\delta} \frac{d \log t}{\log t \, (\log x - \log t)^2}$$

$$= (\log\log x)^{n-2} \cdot \left\{ \frac{1}{\log^2 x} \int_{1+\delta}^{x-\delta} \frac{d \log t}{\log t} - \frac{1}{\log^2 x} \int_{1+\delta}^{x-\delta} \frac{\log t \, d \log t}{(\log x - \log t)^2} + \frac{2}{\log x} \int_{1+\delta}^{x+\delta} \frac{d \log t}{(\log x - \log t)^2} \right\}$$

$$= o\left(\frac{(\log\log x)^n}{\log x}\right),$$

und dasselbe gilt für $I_3(x)$.

Damit ist

$$W(x) = \sum_{w_i \leq x} 1 \geqq c_{37} \cdot x \left[I_1(x) + o\left(\frac{(\log\log x)^n}{\log x}\right)\right] \tag{26}$$

und die gesamte Behauptung auf den Nachweis der Abschätzung

$$I_1(x) \geqq c_{38} \cdot \frac{(\log\log x)^n}{\log x}, \tag{27}$$

die (24) für $k = n + 1$ liefert, zurückgeführt.

(27) ist leicht zu bestätigen; denn es ist

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \int\limits_{1+\delta}^{x-\delta} \frac{\left(\log\log \frac{x}{t}\right)^{n-1}}{t \log t \log \frac{x}{t}}\, dt > \int\limits_{1+\delta}^{\sqrt{x}} \frac{\left(\log\log \frac{x}{t}\right)^{n-1}}{t \log t \log \frac{x}{t}}\, dt \\ &\geqq c_{39}(\log\log x)^{n-1} \int\limits_{1+\delta}^{\sqrt{x}} \frac{d \log t}{\log t\,(\log x - \log t)} \\ &= c_{39}(\log\log x)^{n-1} \left\{ \frac{1}{\log x} \int\limits_{1+\delta}^{\sqrt{x}} \frac{d\log t}{\log t} + \frac{1}{\log x} \int\limits_{1+\delta}^{\sqrt{x}} \frac{d \log t}{\log x - \log t} \right\} \\ &\geqq c_{39}(\log\log x)^{n-1} \left\{ c_{40} \frac{\log\log x}{\log x} + c_{41} \right\} \\ &\geqq c_{38} \frac{(\log\log x)^n}{\log x}. \end{aligned}$$

Damit ist Satz 11 bewiesen.

Um einen Sonderfall von Satz 11 herauszugreifen, nehmen wir vorläufig an, daß auch für $k > 1$ die Elemente aus $\mathfrak{P}^k$, die einer festen primen Restklasse angehören, in $\mathfrak{P}^k$ dicht liegen [7]; seien r und m feste positive ganze zueinander teilerfremde Zahlen, so bezeichne $\mathfrak{P}^k_{r,m}$ die Menge aller Elemente aus $\mathfrak{P}^k$, die $\equiv r(m)$ sind. Aus Satz 11 folgt dann etwa

Satz 12. $$\delta^*(\mathfrak{P}^2_{r_1, m_1} + a^{\mathfrak{P}^1_{r_2, m_2}}) > 0.$$

§ 3.

$\mathfrak{P}^k = {}_{\mathrm{Df}}\mathfrak{P}_k$ sei die eingangs erklärte Menge aller aus k (entsprechend ihrer Vielfachheit gezählten) Primfaktoren zusammengesetzten positiven Zahlen; $\mathfrak{Q}_k$ sei die Menge aller aus genau k verschiedenen Primfaktoren zusammengesetzten positiven Zahlen; $\mathfrak{R}_k$ schließlich sei die Menge aller positiven Zahlen, die genau k verschiedene Primteiler haben. Bekanntlich gilt nach Landau [8], § 56

$$P_k(x) \sim Q_k(x) \sim R_k(x) \sim \frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{x}{\log x} \cdot (\log\log x)^{k-1}, \tag{28}$$

während die entsprechende Frage nach dem asymptotischen Verhalten für die (wie am Schluß von § 2 definierten) Mengen $\mathfrak{P}_{k;\,r,\,m} = {}_{\mathrm{Df}}\mathfrak{P}^k_{r,\,m}$, $\mathfrak{Q}_{k;\,r,\,m}$ und $\mathfrak{R}_{k;\,r,\,m}$ in Landau [12], S. 641, Fußnote 1, offen gelassen wird.

[7]) Der Nachweis hierfür wird in § 3 geliefert.

Wir beweisen in Verallgemeinerung des Primzahlsatzes für arithmetische Progressionen über (28) hinaus den

Satz 13. *Für $x \to \infty$ ist*

$$(29)\quad P_{k;\,r,\,m}(x) \sim Q_{k;\,r,\,m}(x) \sim R_{k;\,r,\,m}(x) \sim \frac{1}{\varphi(m)} \cdot \frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{x}{\log x} \cdot (\log\log x)^{k-1}.$$

Beweis. Aus dem Primzahlsatz für arithmetische Progressionen in der Gestalt

$$(30)\qquad \Theta(x) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv r(m)}} \log p \sim \frac{x}{\varphi(m)} \qquad (p \in \mathfrak{P})$$

erhält man ganz wie in [8], § 56 den

Hilfssatz. *u, x seien reell, $2 \leqq u \leqq x$, und $F(u, x)$ habe die Eigenschaften*

1. $F(u, x) \geqq 0$,
2. *für festes $x > 2$ ist $\dfrac{F(u, x)}{\log u}$ monoton nicht wachsend in u,*
3. $F(2, x) = o\left(\displaystyle\int_2^x \frac{F(u, x)}{\log u}\, du\right)$,
4. $\displaystyle\int_2^x \frac{F(u, x)}{\log u}\, du$ *ist divergent.*

Dann ist

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv r(m) \\ p \in \mathfrak{P}}} F(p, x) \sim \frac{1}{\varphi(m)} \int_2^x \frac{F(u, x)}{\log u}\, du.$$

Zunächst werde die Behauptung $Q_{k;r,m}(x) \sim \dfrac{1}{\varphi(m)} \cdot \dfrac{1}{(k-1)!} \cdot \dfrac{x}{\log x} \cdot (\log\log x)^{k-1}$ durch Induktion nach k bewiesen; für $k = 1$ ist sie richtig, für $k = \nu$ nehmen wir ihre Richtigkeit an.

Die Anzahl der Lösungen von

$$(31\text{a})\qquad p' \cdot q = p' \cdot (p_1' p_2' \cdots p_\nu') \leqq x$$

mit

$$(31\text{b})\qquad p' \cdot q \equiv r(m),\quad (r, m) = 1,\quad \{p', p_1', p_2', \ldots, p_\nu'\} \subset \mathfrak{P},\quad q \in \mathfrak{Q},$$

ist einerseits gleich

$$(32)\qquad \sum_{\substack{1 \leq r_1 < m \\ (r_1, m) = 1}} \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv \frac{r}{r_1}(m)}} Q_{\nu;\,r_1,\,m}\left(\frac{x}{p}\right),$$

andererseits gleich

$$(33)\qquad (\nu + 1)\, Q_{\nu+1;\,r,\,m}(x) + g_{r,\,m}(x),$$

worin $g_{r,\,m}(x)$ die Anzahl aller natürlichen Zahlen $n \leqq x$, $n \equiv r(m)$, ist, die aus $\nu - 1$ verschiedenen Primzahlen in erster und genau einer in zweiter Potenz zusammengesetzt sind. Wie in [8], § 56 liefert die Induktionsvoraussetzung

$$g_{r,\,m}(x) = o\left(Q_{\nu;\,r,\,m}(x)\right);$$

also folgt aus (32) und (33) mit $r_2 = \dfrac{r}{r_1}$

$$(34)\qquad \sum_{\substack{1 \leq r_1 < m \\ (r_1, m) = 1}} \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv r_2(m) \\ p \in \mathfrak{P}}} Q_{\nu;\,r_1,\,m}\left(\frac{x}{p}\right) \sim (\nu + 1)\, Q_{\nu+1;\,r,\,m}(x).$$

Nun setze man $\sum\limits_{\substack{p \leq x \\ p \equiv r_s(m) \\ p \in \mathfrak{P}}} Q_{\nu;\, r_1,\, m}\left(\frac{x}{p}\right) = \sum\limits_{\substack{p \leq x \\ p \equiv r_s(m) \\ p \in \mathfrak{P}}} F(p, x)$ und weise wie in [8] das Erfülltsein der Voraussetzungen des Hilfssatzes für $F(u, x) = Q_{\nu;\, r_1,\, m}\left(\frac{x}{u}\right)$ nach; man erhält dabei

$$\int\limits_2^x \frac{F(u, x)}{\log u}\, du \sim \frac{1}{\varphi(m)} \cdot \frac{\nu + 1}{\nu!} \cdot \frac{x}{\log x} \cdot (\log\log x)^\nu. \tag{35}$$

(34) und (35) liefern in Verbindung mit dem Hilfssatz die Behauptung für $Q_{\nu+1;\, r,\, m}(x)$:

$$Q_{\nu+1;\, r,\, m}(x) \sim \frac{1}{\varphi(m)} \cdot \frac{1}{\nu!} \cdot \frac{x}{\log x} \cdot (\log\log x)^\nu. \tag{36}$$

Der restliche Teil der Behauptung des Satzes ergibt sich jetzt unmittelbar durch Anwendung oder Übertragung des Abschnittes III aus [8], § 56.

Berlin-Dahlem, Mathematisches Institut der Freien Universität, 21. März 1955.

Literaturverzeichnis.

[1] *N. P. Romanov*, Über einige Sätze der additiven Zahlentheorie, Math. Ann. **109** (1934), 668—678.
[2] *Kai-Lai Chung*, Two remarks on Viggo Brun's method, Science Reports Nat. Tsing Hua Univ., Sect. A, 1940, Nr. 2—3.
[3] *V. Brun*, Le crible d'Eratosthène et le théorème de Goldbach, Christiania Vidensk. Selsk. Skr., 1920, Nr. 3.
[4] *E. Landau*, Über einige neuere Fortschritte der additiven Zahlentheorie, Cambridge Tracts 35.
[5] *H. H. Ostmann*, Additive Zahlentheorie I, Ergebnisbericht 1955.
[6] *B. Volkmann*, Über Klassen von Mengen natürlicher Zahlen, Journ. f. reine u. ang. Math. **190** (1952), 199—230.
[7] *R. C. Buck*, Measure theoretic approach to density, Amer. Journ. of Math. **68** (1946), 560—580.
[8] *E. Landau*, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen I.
[9] *A. Selberg*, The general sieve method in prime number theory, Proc. Congr. of Math. Cambr. 1952.
[10] *W. Knödel*, Sätze über Primzahlen, Monatsh. f. Math. **55** (1951), 62—75.
[11] *K. Prachar*, Über einen Satz der additiven Zahlentheorie, Monatsh. f. Math. **56** (1952), 101—104.
[12] *E. Landau*, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen II.

Eingegangen 15. April 1955.

Ein Beitrag zur Theorie der Minimalbasen.*)

Von *Erich Härtter* in Mainz.

§ 1. Einleitung und Definitionen.

1. Neben dem Begriff der Dichte spielt in der neueren elementaren additiven Zahlentheorie wohl der der Basis die wichtigste Rolle. Seine Definition lautet:

Sei $\mathfrak{M} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ mit $x_0 = 0$ und $x_n < x_{n+1}$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$ eine (endliche oder unendliche) Menge nichtnegativer ganzer Zahlen. Eine Menge $\mathfrak{B} = \{b_0, b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots\}$ nichtnegativer ganzer Zahlen heißt *Basis der Ordnung h* ($h \geqq 1$) für $\mathfrak{M}$, wenn für jede Zahl $x_n \in \mathfrak{M}$ eine Darstellung

$$x_n = \sum_{\varkappa=1}^{h} b^{(\varkappa)}, \quad b^{(\varkappa)} \in \mathfrak{B},$$

existiert; also in der Schreibweise der additiven Zahlentheorie, wenn

$$h\mathfrak{B} \geqq \mathfrak{M}$$

ist.

Hieraus folgt, daß auch $0 \in \mathfrak{B}$ ist. Als weitere Bedingung kann man für $\mathfrak{B}$ verlangen

$$\mathfrak{B} \leqq \mathfrak{M}. \tag{1}$$

In diesem Sinn wollen wir von Basen der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ ohne oder mit Zusatzbedingung (1) sprechen. Die Existenz von solchen Basen ist für jede Menge $\mathfrak{M}$ klar.

Zwei wichtige Spezialfälle wollen wir besonders hervorheben:

a) $\mathfrak{M} = \{0, 1, 2, \ldots, n\} = [0, n]$, n natürliche Zahl, wobei allgemein das Symbol $[x, y]$ die Menge der ganzen Zahlen z mit $x \leqq z \leqq y$ bedeutet. In diesem Fall sprechen wir von *Abschnittsbasen* der Ordnung h für n.

b) $\mathfrak{M} = \mathfrak{Z} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ ($\mathfrak{Z}$ = Menge aller nichtnegativen ganzen Zahlen).

Hier ist die Zusatzbedingung (1) stets erfüllt und die nähere Bestimmung „für $\mathfrak{Z}$" lassen wir bei den Basen meistens weg, so daß wir kurz von Basen der Ordnung h reden.

Als einfache Folgerung aus der Definition erhält man

Satz 1. *Sei $\mathfrak{B}_1$ Basis der Ordnung h für $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{B}_2$ Basis der Ordnung h für $\mathfrak{M}_2$ (ohne oder mit Bedingung* (1)*). Dann ist*

$\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2$ *Basis der Ordnung h für* $\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$ (*ohne oder mit Eigenschaft* (1)),

$\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2$ *Basis der Ordnung h für* $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$ (*ohne oder mit Eigenschaft* (1)).

(*Dabei bedeutet* $\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2$ *bzw.* $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$ *die Summenmenge im Schnirelmannschen Sinn.*)

---

*) D 77. Umgearbeitete Fassung einer bei der naturwissenschaftlichen Fakultät der Johannes Gutenberg-Universität Mainz eingereichten Dissertation. Referent: Professor *Dr. H. Rohrbach*.

Beweis. Die erste Behauptung ist trivial. Die zweite Behauptung sieht man auch leicht ein. $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$ enthält nämlich alle Zahlen $\varepsilon_1 x_n^{(1)} + \varepsilon_2 x_m^{(2)}$ ($x_n^{(1)} \in \mathfrak{M}_1$, $x_m^{(2)} \in \mathfrak{M}_2$; $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = 0$ oder 1). Für $x_n^{(1)}$ und $x_m^{(2)}$ gibt es Darstellungen

$$x_n^{(1)} = \sum_{\varkappa=1}^{h} b_1^{(\varkappa)}, \quad b_1^{(\varkappa)} \in \mathfrak{B}_1,$$

$$x_m^{(2)} = \sum_{\varkappa=1}^{h} b_2^{(\varkappa)}, \quad b_2^{(\varkappa)} \in \mathfrak{B}_2.$$

Also erhält man für $x_n^{(1)} + x_m^{(2)}$ eine Darstellung $x_n^{(1)} + x_m^{(2)} = \sum_{\varkappa=1}^{h} (b_1^{(\varphi)} + b_2^{(\varkappa)})$ und die Zahlen $b_1^{(\varkappa)} + b_2^{(\varkappa)}$ sind Elemente von $\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2$.

Man kann jedoch unter den gleichen Voraussetzungen nicht behaupten, daß $\mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2$ Basis der Ordnung h für $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2$ ist. Wir geben dafür ein Gegenbeispiel: Die Menge $\mathfrak{M}_1$ sei so beschaffen, daß $\mathfrak{M}_1 \cap [0, h+1] = \{0, 1, 2, h+1\}$ ist, und für $\mathfrak{M}_2$ gelte $\mathfrak{M}_2 \cap [0, h+1] = \{0, 1, 3, h+1\}$. Für $\mathfrak{B}_1$ möge $\mathfrak{B}_1 \cap [0, h+1] = \{0, 1, 2\}$ und für $\mathfrak{B}_2$ möge $\mathfrak{B}_2 \cap [0, h+1] = \{0, 1, 3\}$ gelten. Dann ist $\{\mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2\} \cap [0, h+1] = \{0, 1\}$ und $h + 1 \notin h\{0, 1\}$. Wir wollen hier noch einige Definitionen, die später gebraucht werden, zusammenstellen.

Eine Menge $\mathfrak{B}$ nichtnegativer ganzer Zahlen heißt eine *asymptotische Basis* der Ordnung h für eine Menge $\mathfrak{M}$, wenn sich jede Zahl aus $\mathfrak{M}$ oberhalb einer gewissen Schranke N als Summe von h Summanden aus $\mathfrak{B}$ darstellen läßt.

Ist $\mathfrak{B}$ eine Basis der Ordnung h für eine Menge $\mathfrak{M}$, aber keine Basis der Ordnung $h - 1$ für $\mathfrak{M}$, so soll $\mathfrak{B}$ *Basis genau h-ter Ordnung* für $\mathfrak{M}$ heißen.

Die Anzahl der positiven Elemente $a \leqq x$ ($0 \leqq x$, reell) in einer Menge $\mathfrak{A}$ nichtnegativer ganzer Zahlen bezeichnen wir mit $A(x)$; zu jeder solchen Menge gehört also die *Anzahlfunktion*

$$A(x) = \sum_{\substack{a=1 \\ a \in \mathfrak{A}}}^{[x]} 1, \quad A(x) = 0 \text{ für } x < 1.$$

Bei der Untersuchung der Basen drängt sich nun zwangsläufig die Frage auf, Basen mit „möglichst wenig" Elementen zu konstruieren. Im Fall $\mathfrak{M} = [0, n]$, den wir als das Abschnittsproblem bezeichnen wollen, ist klar, wie die Minimaleigenschaft zu verstehen ist: Unter allen Abschnittsbasen der Ordnung h für eine gewisse Zahl n gibt es mindestens eine mit kleinstmöglicher Elementeanzahl. Eine solche Basis wollen wir *Abschnittsminimalbasis* der Ordnung h für n nennen. Man kann also für eine feste Zahl n alle Abschnittsminimalbasen der Ordnung h für n in endlich vielen Schritten durch Probieren bestimmen. Untersuchungen in dieser Richtung stammen von Rohrbach [5], [6].

Der allgemeine Fall, daß $\mathfrak{M}$ eine unendliche Menge ist, ist nun keineswegs eine einfache Verallgemeinerung des Abschnittsproblems. Für den Minimalbasisbegriff existieren hier nicht weniger als neun verschiedene auf Rohrbach, Stöhr und Chatrovsky zurückgehende Definitionen. Wir wollen uns bei der Aufzählung an die Bezeichnung von Stöhr [8] halten. (Stöhr betrachtet nur den Fall $\mathfrak{M} = \mathfrak{Z}$; die Definitionen lassen sich aber auch sofort für beliebiges unendliches $\mathfrak{M}$ formulieren.)

Definition 1. *Eine Basis $\mathfrak{B}$ der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ heißt* Minimalbasis 1. Art[1]), *wenn für jede Basis $\tilde{\mathfrak{B}}$ der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ und jede natürliche Zahl $n \geqq 1$ die Ungleichung $B(n) \leqq \tilde{B}(n)$ gilt.*

[1]) Der Zusatz „der Ordnung h für $\mathfrak{M}$" versteht sich in diesem Zusammenhang von selbst und wird nicht besonders hervorgehoben. Außerdem lassen wir zunächst offen, ob wir $\mathfrak{B}$ und $\tilde{\mathfrak{B}}$ mit Zusatzbedingung (1) versehen oder nicht.

Definition 2. *Eine Basis $\mathfrak{B}$ der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ heißt* Minimalbasis 2. Art, *wenn es ein N so gibt, daß für jede Basis $\tilde{\mathfrak{B}}$ der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ und für alle $n \geqq N$ die Ungleichung $B(n) \leqq \tilde{B}(n)$ gilt.*

Definition 3. *Eine Basis $\mathfrak{B}$ der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ heißt* Minimalbasis 3. Art, *wenn es zu jeder Basis $\tilde{\mathfrak{B}}$ der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ ein $N = N(\tilde{\mathfrak{B}})$ so gibt, daß für alle $n \geqq N$ die Ungleichung $B(n) \leqq \tilde{B}(n)$ gilt.* (Hier darf also N von $\tilde{\mathfrak{B}}$ abhängen, in Definition 2 nicht.)

Definition 3a. *Eine Basis $\mathfrak{B}$ der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ heißt* Minimalbasis der Art 3a, *wenn es zu jeder Basis $\tilde{\mathfrak{B}} \neq \mathfrak{B}$ der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ ein $N = N(\tilde{\mathfrak{B}})$ so gibt, daß für alle $n \geqq N$ die Ungleichung $B(n) < \tilde{B}(n)$ gilt*[2]).

Definition 4. *Eine Basis $\mathfrak{B}$ der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ heißt* Minimalbasis 4. Art, *wenn es eine unendliche Folge natürlicher Zahlen $\{n_i\}$ so gibt, daß für jede Basis $\tilde{\mathfrak{B}}$ der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ die Ungleichung $B(n_i) \leqq \tilde{B}(n_i)$ gilt.*

Definition 5. *Eine Basis $\mathfrak{B}$ der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ heißt* Minimalbasis 5. Art, *wenn es zu jeder Basis $\tilde{\mathfrak{B}}$ der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ eine unendliche Folge natürlicher Zahlen $\{n_i\}$ (die von $\tilde{\mathfrak{B}}$ abhängt) so gibt, daß die Ungleichung $B(n_i) \leqq \tilde{B}(n_i)$ gilt.*

Definition 6. *Eine Basis $\mathfrak{B}$ der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ heißt* Minimalbasis 6. Art, *wenn es zu jeder Basis $\tilde{\mathfrak{B}} \neq \mathfrak{B}$ der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ eine unendliche Folge natürlicher Zahlen $\{n_i\}$ (die von $\tilde{\mathfrak{B}}$ abhängt) so gibt, daß die Ungleichung $B(n_i) < \tilde{B}(n_i)$ gilt.*

Definition 7. *Eine Basis $\mathfrak{B}$ der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ heißt* Minimalbasis 7. Art, *wenn keine echte Teilmenge von $\mathfrak{B}$ eine Basis der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ ist.*

Diese Definition besagt: Jedes Element $b \in \mathfrak{B}$ wird zur Darstellung mindestens einer Zahl $x(b) \in \mathfrak{M}$ benötigt; d. h. zu jedem Element $b \in \mathfrak{B}$ gibt es eine Folge (endlich oder unendlich) von Zahlen $x(b) \in \mathfrak{M}$, die ohne Benutzung des Elements b nicht mit h Summanden aus $\mathfrak{B}$ darstellbar sind. Dies schließt ein, daß, falls eine solche Zahl $x(b)$ mehrere Darstellungen durch h Summanden aus $\mathfrak{B}$ besitzt, jede dieser Darstellungen den Summanden b aufweist.

Definition 8. *Eine Basis $\mathfrak{B}$ der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ heißt* Minimalbasis 8. Art, *wenn $B(n) = O\left(\sqrt[h]{M(n)}\right)$ ist.*

Alle diese Definitionen lassen sich auf asymptotische Basen übertragen, so daß wir auch von *asymptotischen Minimalbasen* 1. bis 8. Art sprechen können. Zum Unterschied davon nennen wir die oben definierten auch *gewöhnliche Minimalbasen* 1. bis 8. Art.

In Definition 7 wird zweifellos recht wenig verlangt. Trotzdem hat diese Definition ihre Bedeutung, weil alle anderen Definitionen, ausgenommen Definition 8, diese enthalten.

2. Wir wollen uns fernerhin, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt ist, auf den Basisbegriff ohne Zusatzbedingung (1) beschränken. Denn es gibt Mengen $\mathfrak{M}$, für die es nur *eine* Basis der Ordnung h ($h \geqq 2$) mit Bedingung (1) gibt. Die Minimalbasisdefinitionen 1 bis 6 werden dann gewissermaßen inhaltlos, weil es für die betreffenden Ungleichungen der Anzahlfunktion zu der einen Basis keine Vergleichsbasis gibt. Beispiele dafür sind die Mengen

$$(2) \qquad \mathfrak{M} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \text{ mit } hx_n < x_{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

[2]) Bei Minimalbasen der Art 1 bis 3a kann man die entsprechenden Ungleichungen für die Anzahlfunktion statt für alle n nur für die Zahlen x_n aus $\mathfrak{M}$ verlangen. Wir wollen jedoch bei der ursprünglichen Definition bleiben.

oder die Menge, die aus der Zahl 0 und allen positiven Zahlen $x \equiv 1 \pmod{h}$ besteht. Für eine solche Menge schreiben wir kurz

$$\mathfrak{M} = \{0;\ x \equiv 1 \pmod{h}\}.$$

Wir zeigen hier

Satz 2. *Wenn eine Menge $\mathfrak{M}$ nur eine Basis der Ordnung h mit der Zusatzbedingung* (1) *besitzt, dann gilt für jedes Element $x_n \in \mathfrak{M}$*

$$x_n \in h(\mathfrak{M} - \{x_n\}),$$

und umgekehrt.

Beweis. Weil $\mathfrak{M}$ nur *eine* Basis $\mathfrak{B}$ der Ordnung h besitzen soll, gilt $\mathfrak{B} = \mathfrak{M}$; denn mit $\mathfrak{B}$ wäre sonst auch jede Obermenge von $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{M}$ Basis. Auf Grund von Satz 11 ist $\mathfrak{B}$ Minimalbasis 7. Art der Ordnung h für $\mathfrak{M}$, d. h. jedes Element aus $\mathfrak{B}$ wird zur Darstellung von Zahlen $x_n \in \mathfrak{M}$ benötigt; und zwar wird jedes Element zu seiner eigenen Darstellung benötigt, weil zur Darstellung einer anderen Zahl aus $\mathfrak{M}$ diese selbst als Element vorhanden ist. Wenn umgekehrt für jedes Element $x_n \in \mathfrak{M}$ gilt $x_n \in h(\mathfrak{M} - \{x_n\})$, dann ist $\mathfrak{B} = \mathfrak{M}$ die einzige Basis der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ mit Zusatzbedingung (1).

In diesem Zusammenhang wollen wir noch folgenden Satz beweisen:

Satz 3. *Sei $\mathfrak{M} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ mit $x_0 = 0$ und $x_n < x_{n+1}$ eine Menge nichtnegativer ganzer Zahlen. Dann ist die Klasse K der Basen $\mathfrak{B}$ der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ mit Zusatzbedingung* (1) *entweder endlich, oder, wenn sie unendlich ist, von der Mächtigkeit des Kontinuums.*

Beweis. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1) Es gibt eine Basis $\mathfrak{B}_0$ der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ (mit $\mathfrak{B}_0 \subseteq \mathfrak{M}$) derart, daß $\mathfrak{M} - \mathfrak{B}_0$ eine unendliche Menge ist. Dann folgt hieraus sofort (da die Klasse aller Untermengen einer unendlichen Menge natürlicher Zahlen von der Mächtigkeit des Kontinuums ist), daß die Klasse K aller Basen $\mathfrak{B}$ der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ (mit $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{M}$) die Mächtigkeit des Kontinuums hat.

2) Für jede Basis $\mathfrak{B}$ der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ (mit $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{M}$) ist die Menge $\mathfrak{M} - \mathfrak{B}$ endlich. Wir wollen zeigen, daß in diesem Fall die Klasse K endlich ist.

Angenommen, die Klasse K wäre unendlich. (Dann wäre K abzählbar.) Dann gibt es unendlich viele verschiedene Untermengen

$$\mathfrak{X}_\nu = \{\xi_1^{(\nu)}, \ldots, \xi_{k_\nu}^{(\nu)}\} \text{ mit } \xi_\varkappa^{(\nu)} < \xi_{\varkappa+1}^{(\nu)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

von $\mathfrak{M}$, so daß $\mathfrak{B}_\nu = \mathfrak{M} - \mathfrak{X}_\nu$ Basis der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ (mit $\mathfrak{B}_\nu \subseteq \mathfrak{M}$) ist und alle Elemente $x_n \in \mathfrak{M}$, $x_n > \xi_{k_\nu}^{(\nu)}$, die dann in $\mathfrak{B}_\nu$ enthalten sind, zu ihrer eigenen Darstellung benötigt werden. Aus der Klasse dieser Mengen $\mathfrak{X}_\nu$ bestimmen wir $h-1$ Mengen $\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_{h-1}$ mit den Eigenschaften

$$\xi_1^{(1)} \leqq \xi_{k_1}^{(1)} < \xi_1^{(2)} \leqq \xi_{k_2}^{(2)} < \xi_1^{(3)} \leqq \xi_{k_3}^{(3)} < \cdots < \xi_1^{(h-1)} \leqq \xi_{k_{h-1}}^{(h-1)}.$$

(So wählen wir die Numerierung der Mengen $\mathfrak{X}_\nu$.)

Eine solche Auswahl ist möglich: Seien schon t Mengen $\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_t$, $1 \leqq t \leqq h-2$, mit den geforderten Eigenschaften bestimmt. Dann gibt es eine Menge $\mathfrak{X}_r$ mit $\xi_{k_r}^{(r)} > \xi_{k_t}^{(t)}$. Aus $\mathfrak{X}_r$ bilden wir $\widetilde{\mathfrak{X}}_r$, indem wir setzen

$$\widetilde{\mathfrak{X}}_r = \mathfrak{X}_r \cap \{x_n \in \mathfrak{M};\ x_n > \xi_{k_t}^{(t)}\}.$$

Aus $\tilde{\mathfrak{X}}_r$ konstruieren wir schließlich $\mathfrak{X}_{t+1}$, indem wir $\tilde{\mathfrak{X}}_r$ um endlich viele Elemente größer als $\xi_{k_r}^{(r)}$ aus $\mathfrak{M}$ vermehren, so daß $\mathfrak{M} - \mathfrak{X}_{t+1}$ Basis der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ ist und alle hinreichend großen Elemente aus $\mathfrak{M} - \mathfrak{X}_{t+1}$ zu ihrer eigenen Darstellung benötigt werden.

Sei weiterhin $\xi_{k_\nu}^{(\nu)} > \xi_{k_{h-1}}^{(h-1)}$. Dann ist $\xi_{k_\nu}^{(\nu)}$ durch h Elemente aus $\mathfrak{B}_\nu$ nur mit Hilfe von Elementen aus jeder Menge $\mathfrak{X}_t$, $1 \leqq t \leqq h-1$, darstellbar.

Nun wählen wir eine unendliche Folge $\{\nu_i\}$ natürlicher Zahlen mit den Eigenschaften

$$h \leqq \nu_i, \quad \nu_i < \nu_{i+1},$$
$$(h-1)\, \xi_{k_{h-1}}^{(h-1)} < \xi_{k_{\nu_i}}^{(\nu_i)} < \xi_{k_{\nu_{i+1}}}^{\nu_{i+1}} - (h-1)\, \xi_{k_{h-1}}^{(h-1)}.$$

Die zugehörige unendliche Folge der Zahlen $\xi_{k_{\nu_i}}^{(\nu_i)}$ nennen wir $\mathfrak{X}$. Dann ist $\mathfrak{M} - \mathfrak{X}$ auch Basis der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ (mit Bedingung (1)), denn in der Darstellung für eine Zahl $\xi_{k_{\nu_i}}^{(\nu_i)} \in \mathfrak{X}$ treten auf Grund obiger Bemerkung mindestens $h-1$ Summanden aus $\bigcup_{t=1}^{h-1} \mathfrak{X}_t$ auf. Hierdurch haben wir aber einen Widerspruch erhalten.

3. Wie Stöhr [8] gezeigt hat, ist im Fall $\mathfrak{M} = \mathfrak{Z}$ die Minimalbasisdefinition 1 inhaltslos, da es für keine Ordnung $h \geqq 2$ eine Minimalbasis 1. Art gibt. Für Minimalbasen 7. Art beweist Stöhr [8] für $\mathfrak{M} = \mathfrak{Z}$ einen *Existenzsatz*: In jeder Basis der Ordnung h ist eine Minimalbasis 7. Art der Ordnung h als Teilmenge enthalten. Minimalbasen 8. Art für $\mathfrak{M} = \mathfrak{Z}$ konstruierten Stöhr [7], Raikov [4] und Chatrovsky [1]. In der vorliegenden Arbeit sollen einige Fragen, die im Verlauf der Untersuchungen über Minimalbasen auftreten, behandelt werden.

In § 2 wollen wir die Minimalbasisdefinitionen 1 bis 6 in ihrem Verhalten zueinander untersuchen. In diesem Zusammenhang wollen wir zeigen, daß, wenn es für eine Menge $\mathfrak{M}$ Minimalbasen 2. oder 3. Art gibt, die Klasse dieser Minimalbasen abzählbar ist, und daß es für $\mathfrak{M} = \mathfrak{Z}$ für keine Ordnung $h \geqq 2$ eine Basis gibt, die Definition 3a befriedigt.

Die §§ 3 bis 6 sind den Minimalbasen 7. Art vorbehalten. In § 3 werden wir einige Existenz- und Mächtigkeitsaussagen machen. So hat z. B. für jede unendliche Menge $\mathfrak{M}$ sowohl die Klasse der gewöhnlichen als auch der asymptotischen Minimalbasen 7. Art die Mächtigkeit des Kontinuums. In § 4 sollen einige Sätze über die Struktur der Minimalbasen 7. Art, die zum Teil auch allgemein für Basen gelten, Platz finden. Eigenschaften von Ober- und Untermengen von Minimalbasen 7. Art werden in § 5 behandelt. Wir wollen zeigen, daß es (für unendliches $\mathfrak{M}$) zu jeder endlichen Menge $\mathfrak{A}$ nichtnegativer ganzer Zahlen eine Minimalbasis 7. Art gibt, die diese endliche Menge enthält. In § 6 endlich sollen einige Sätze über Minimalbasen 7. Art mit positiver Dichte, die ja besonders leicht zugänglich sind, bewiesen werden.

Die meisten der entsprechenden Fragestellungen werden für Minimalbasen 8. Art trivial, wie in § 7 gezeigt wird. Außerdem gibt es nicht für jede Menge $\mathfrak{M}$ eine Minimalbasis 8. Art. Alle diese Ergebnisse lassen es als zweckmäßig erscheinen, die Definition 7 als einzig brauchbare Minimalbasiskennzeichnung zugrundezulegen.

Zum Schluß betrachten wir in § 8 eine Modifikation des Basisbegriffs. Wir werden sehen, daß zum großen Teil die Sätze, wie sie für gewöhnliche Basen gelten, auch hier in analoger Form ihre Gültigkeit behalten.

Schließlich sei den Herren Professor Dr. Rohrbach, Dr. Stöhr und Dr. Volkmann für zahlreiche Anregungen und Hinweise gedankt. Weiterhin möchte ich es nicht versäumen, an dieser Stelle Herrn Professor Rohrbach, bei dem ich in erster Linie meine mathematische Ausbildung erhalten habe, für die Durchsicht der Arbeit und das rege Interesse, das er ihr schenkte, meinen besonderen Dank auszusprechen.

§ 2. Über Minimalbasen erster bis sechster Art.

4. *Minimalbasen 1. Art.* Wie in Nr. 3 schon erwähnt, gibt es im Fall $\mathfrak{M} = \mathfrak{Z}$ für keine Ordnung $h \geqq 2$ eine Minimalbasis 1. Art. Jedoch können bei geeigneter Beschaffenheit von $\mathfrak{M}$ Minimalbasen 1. Art einer Ordnung h für $\mathfrak{M}$ existieren. Zum Beispiel besitzt jede Menge $\mathfrak{M}$ der Gestalt (2) sich selbst als Minimalbasis 1. Art der Ordnung h, und zwar eindeutig, denn aus der Definition der Minimalbasen 1. Art folgt sofort, daß wenn für eine Menge $\mathfrak{M}$ eine Minimalbasis 1. Art der Ordnung h existiert, diese eindeutig bestimmt ist.

5. *Minimalbasen 2. und 3. Art.* Wenn eine Menge $\mathfrak{M}$ für eine Ordnung h eine Minimalbasis 1. Art besitzt, dann ist diese Basis auch Minimalbasis 2. und 3. Art der Ordnung h für $\mathfrak{M}$. Andererseits gibt es auch Mengen $\mathfrak{M}$, für die zwar keine Minimalbasis 1. Art, aber Minimalbasen 2. Art der Ordnung h existieren, wie das Beispiel

$$\mathfrak{M} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, N = x_{n_0}, x_{n_0+1}, \ldots, x_n, \ldots\}$$

zeigt, wobei N eine hinreichend große natürliche Zahl und $hx_n < x_{n+1}$ ist für $n = n_0, n_0 + 1, \ldots$. Denn für genügend großes N gibt es keine Abschnittsminimalbasis der Ordnung h für N, die Teilmenge von $\{0; x \equiv 1 (\mathrm{mod}\ h)\}$ ist.

Die Frage, ob im Fall $\mathfrak{M} = \mathfrak{Z}$ Minimalbasen 2. oder 3. Art einer Ordnung $h \geqq 2$ existieren, ist noch unbeantwortet. Wir wollen zeigen, daß, wenn es Minimalbasen 2. oder 3. Art gibt, es höchstens abzählbar viele geben kann. Wir schicken voraus

Hilfssatz 1. *Jede Klasse K von Basen $\mathfrak{B}$ der Ordnung h für eine Menge $\mathfrak{M}$ (ohne oder mit Zusatzbedingung (1)), in der es zu je zwei Elementen $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \in K$ eine Zahl $N = N(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$ derart gibt, daß für alle natürlichen Zahlen $n \geqq N$ die Gleichung*

$$B_1(n) = B_2(n)$$

gilt, ist abzählbar.

Beweis. Für jede (endliche) Menge $\mathfrak{M} \cap [0, N]$ gibt es nur endlich viele Basen der Ordnung h (ohne oder mit Bedingung (1)), deren Elemente in $[0, N]$ liegen, und nur darin unterscheiden sich $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$. Abzählbar viele Zahlen N ergeben also abzählbar viele Basen $\mathfrak{B}$.

Nun können wir den schon angekündigten Satz beweisen:

Satz 4. *Wenn es für eine Menge $\mathfrak{M}$ Minimalbasen 2. oder 3. Art der Ordnung h gibt, dann ist die Klasse dieser Minimalbasen abzählbar.*

Beweis. Zunächst ist klar, daß man sich auf Minimalbasen 3. Art beschränken kann. Seien also $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ Minimalbasen 3. Art der Ordnung h für $\mathfrak{M}$. Dann ist

$$B_1(n) \leqq B_2(n) \text{ für } n \geqq N = N(\mathfrak{B}_2)$$

und

$$B_2(n) \leqq B_1(n) \text{ für } n \geqq M = M(\mathfrak{B}_1),$$

also

$$B_1(n) = B_2(n) \text{ für } n \geqq \max(N, M).$$

Anwendung von Hilfssatz 1 liefert dann sofort die Behauptung.

6. *Minimalbasen der Art 3a.* Beispiel für eine Menge $\mathfrak{M}$, die eine Minimalbasis h-ter Ordnung der Art 3a besitzt, ist

$$\mathfrak{M} = \{x_0, x_1, 2x_1, 3x_1, \ldots, hx_1, x_2, 2x_2, \ldots, hx_2, x_3, 2x_3, \ldots, hx_3, \ldots\},$$

wo $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $h^2 x_n < x_{n+1}$ ist für $n = 0, 1, 2, \ldots$. Hier ist

$$\mathfrak{B} = \{x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots\}$$

Minimalbasis h-ter Ordnung der Art 3a für $\mathfrak{M}$ und zwar eindeutig, wie man aus der Minimalbasisdefinition 3a sofort folgert.

Um zu zeigen, daß es im Fall $\mathfrak{M} = \mathfrak{Z}$ für keine Ordnung $h \geqq 2$ eine Basis $\mathfrak{B}$ gibt, die die Definition 3a erfüllt, beweisen wir zunächst den

Hilfssatz 2. *Zu jeder Basis $\mathfrak{B}$ der Ordnung h (für $\mathfrak{Z}$), $h \geqq 2$, $\mathfrak{B} \neq \mathfrak{Z}$, gibt es eine von $\mathfrak{B}$ verschiedene Basis $\mathfrak{B}^*$ der Ordnung h (für $\mathfrak{Z}$) derart, daß für unendlich viele natürliche Zahlen n die Gleichung*

$$B(n) = B^*(n)$$

gilt.

Beweis. Sei $\mathfrak{B} = \{b_0, b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots\}$ mit $b_0 = 0$, $b_1 = 1$ und $b_k < b_{k+1}$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$ eine Basis der Ordnung h. Dann ist die Zahlenmenge

$$\mathfrak{B}^* = \{0\} \cup \{b_0 + 1, b_1 + 1, b_2 + 1, \ldots, b_k + 1, \ldots\}$$

ebenfalls eine Basis der Ordnung h. Ist nämlich eine nichtnegative ganze Zahl $z \in \mathfrak{Z}$ darstellbar als $z = \sum_{\varkappa=1}^{h} b^{(\varkappa)}$, $b^{(\varkappa)} \in \mathfrak{B}$, dann stellt $\sum_{\varkappa=1}^{h} (b^{(\varkappa)} + 1)$ die Zahl $z + h$ dar ($z = 0, 1, 2, \ldots$). Und die Darstellung einer Zahl $0 \leqq z \leqq h - 1$ erhält man sofort durch Summanden 0 und 1. Daß $\mathfrak{B}^*$ von $\mathfrak{B}$ verschieden ist, folgt leicht aus der Voraussetzung $\mathfrak{B} \neq \mathfrak{Z}$, weil es dann eine Zahl b^* gibt mit den Eigenschaften $b^* - 1 \in \mathfrak{B}$, $b^* \notin \mathfrak{B}$. Außerdem ist $B(b_k) = k$, $B^*(b_k) = (k - 1) + 1$, also $B(b_k) = B^*(b_k)$, womit Hilfssatz 2 bewiesen ist.

Satz 5. *Es gibt (im Fall $\mathfrak{M} = \mathfrak{Z}$) für keine Ordnung $h \geqq 2$ eine Basis $\mathfrak{B}$, die die Minimalbasisdefinition 3a erfüllt.*

Beweis. Folgt sofort aus Hilfssatz 2.

7. *Verhältnis der einzelnen Minimalbasisdefinitionen zueinander.* Für das Verhalten der einzelnen Minimalbasisdefinitionen zueinander gelten folgende Aussagen:

Satz 6. *Wenn es für eine Menge $\mathfrak{M}$ Minimalbasen 2. Art der Ordnung h gibt, ist jede Minimalbasis 3. Art der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ auch Minimalbasis 2. Art der Ordnung h für $\mathfrak{M}$.*

Beweis. Sei $\mathfrak{B}_0$ Minimalbasis 2. Art, $\mathfrak{B}$ Minimalbasis 3. Art. Dann gibt es zu $\mathfrak{B}_0$ ein $N = N(\mathfrak{B}_0)$, so daß

$$B(n) \leqq B_0(n)$$

ist für alle $n \geqq N$. Andererseits gilt für alle $n \geqq N_0$ die Ungleichung

$$B_0(n) \leqq B(n).$$

Für alle $n \geqq \max(N, N_0)$ ist also

$$B(n) = B_0(n),$$

d. h. $\mathfrak{B}$ ist Minimalbasis 2. Art.

Satz 7. *Wenn es für eine Menge $\mathfrak{M}$ Minimalbasen 6. Art der Ordnung h gibt, ist jede Minimalbasis 3. Art der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ auch eine Minimalbasis 6. Art der Ordnung h für $\mathfrak{M}$.*

Beweis. Sei $\mathfrak{B}_0$ Minimalbasis 6. Art, $\mathfrak{B}$ Minimalbasis 3. Art. Angenommen, $\mathfrak{B}$ wäre keine Minimalbasis 6. Art, dann ist also $\mathfrak{B} \neq \mathfrak{B}_0$. Somit wäre

$$B_0(n) < B(n) \tag{3}$$

für unendlich viele n. Andererseits gibt es zu $\mathfrak{B}_0$ ein $N = N(\mathfrak{B}_0)$ so, daß

$$B(n) \leqq B_0(n) \tag{4}$$

ist für alle $n \geqq N$, was aber einen Widerspruch zu (3) bedeutet.

Satz 8. *Wenn es für eine Menge $\mathfrak{M}$ Minimalbasen 6. Art der Ordnung h gibt, gibt es höchstens eine Minimalbasis 3. Art der Ordnung h für $\mathfrak{M}$.*

Beweis. Angenommen, $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ wären Minimalbasen 3. Art; dann gäbe es zu $\mathfrak{B}_2$ ein $N = N(\mathfrak{B}_2)$, so daß

$$B_1(n) \leqq B_2(n) \tag{5}$$

ist für alle $n \geqq N$. Andererseits sind $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ nach Satz 7 auch Minimalbasen 6. Art, d. h. zu $\mathfrak{B}_1$ gibt es eine unendliche Folge natürlicher Zahlen $\{n_i\}$ derart, daß

$$B_2(n_i) < B_1(n_i) \tag{6}$$

ist, was einen Widerspruch zu (5) bedeutet.

Satz 9. *Wenn es für eine Menge $\mathfrak{M}$ Minimalbasen 3. Art der Ordnung h gibt, gibt es höchstens eine Minimalbasis 6. Art der Ordnung h für $\mathfrak{M}$.*

Beweis. Angenommen, $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ wären Minimalbasen 6. Art; sei $\mathfrak{B}$ Minimalbasis 3. Art. Dann gibt es zu $\mathfrak{B}_1$ ein $N = N(\mathfrak{B}_1)$ derart, daß

$$B(n) \leqq B_1(n)$$

ist für alle $n \geqq N$. Hieraus folgt $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1$ in analoger Weise wie die Aussage von Satz 8. Desgleichen gilt natürlich $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_2$, woraus man $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_2$ erhält.

Satz 10. *Wenn es für eine Menge $\mathfrak{M}$ Minimalbasen 4. Art der Ordnung h gibt, ist jede Minimalbasis 3. Art der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ auch Minimalbasis 4. Art der Ordnung h für $\mathfrak{M}$.*

Beweis. Sei $\mathfrak{B}_0$ Minimalbasis 4. Art, $\mathfrak{B}$ Minimalbasis 3. Art. Dann ist

$$B(n) \leqq B_0(n)$$

für alle $n \geqq N$, wobei die Schranke $N = N(\mathfrak{B}_0)$ von $\mathfrak{B}_0$ abhängt, und daraus folgt

$$B(n_i) \leqq B(n_i)$$

für eine feste Folge $\{n_i\}$ natürlicher Zahlen und jede Basis $\tilde{\mathfrak{B}}$ der Ordnung h für $\mathfrak{M}$.

§ 3. Minimalbasen siebenter Art. — Existenz- und Mächtigkeitsaussagen.

8. Wir wollen uns im folgenden etwas ausführlicher mit den Minimalbasen 7. Art befassen und einige von Stöhr [8] aufgeworfene Fragen beantworten.

Wie eingangs schon bemerkt, ist durch Stöhr [8] die Existenzfrage bei Minimalbasen 7. Art (im Fall $\mathfrak{M} = \mathfrak{Z}$) in positivem Sinn beantwortet. Sowohl für den Basisbegriff ohne als auch mit Zusatzbedingung (1) läßt sich dieser Existenzsatz übertragen:

Satz 11. *In jeder Basis der Ordnung h für eine Menge $\mathfrak{M}$ (ohne oder mit Bedingung (1)) ist eine Minimalbasis 7. Art der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ als Teilmenge enthalten.*

Beweis. Die Schlußweise verläuft wörtlich wie im Fall $\mathfrak{M} = \mathfrak{Z}$ (Stöhr [8]).

Wir beweisen nun genauer:

Satz 12. *Ist $\mathfrak{M}$ unendlich, so hat die Klasse K_7^h der Minimalbasen 7. Art genau h-ter Ordnung ($h \geqq 2$) für $\mathfrak{M}$ (ohne Bedingung (1)) die Mächtigkeit des Kontinuums.*

Beweis. Sei $\mathfrak{N} = [0, h] \cap \mathfrak{M} = \{x_0, x_1, \ldots, x_r\}$, $0 \leqq r \leqq h$. Dann ist $\mathfrak{A}_0 = \{0, 1\}$ Basis der Ordnung h für $\mathfrak{N}$ und es ist $x_{r+1} \notin h\mathfrak{A}_0$. Wir setzen $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_0 \cup \{x_{r+1}\}$. Dann gibt es eine Zahl $x_s \in \mathfrak{M}$ so, daß $\{x_0, x_1, \ldots, x_s\} \leqq h\mathfrak{A}_1$, aber $x_{s+1} \notin h\mathfrak{A}_1$ ist. (Wegen $1 \in \mathfrak{A}_1$ ist $x_{s+1} \geqq x_{r+1} + h$.) Wir definieren weiter $\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_1 \cup \{x_{s+1} - h + 1\}$.

Nun konstruieren wir, mit $\mathfrak{A}_2$ beginnend, induktiv Basen der Ordnung h für $\mathfrak{M}$, indem wir $\mathfrak{B}(x_{s+1}) = \mathfrak{A}_2$ setzen. Ist für irgendein $n \geqq s+1$ eine Zahlenmenge $\mathfrak{B}(x_n)$ schon konstruiert,

$$\mathfrak{B}(x_n) = \{b_0, b_1, b_2, \ldots, b_k\} \qquad (b_0 = 0, b_1 = 1, b_2 = x_{r+1}, b_3 = x_{s+1} - h + 1),$$

wobei k von n und $\mathfrak{B}$ abhängt, so setzen wir

a) wenn $x_{n+1} \in h\mathfrak{B}(x_n)$ ist, $\mathfrak{B}(x_{n+1}) = \mathfrak{B}(x_n)$,

b) wenn $x_{n+1} \notin h\mathfrak{B}(x_n)$ ist, $\mathfrak{B}(x_{n+1}) = \mathfrak{B}(x_n) \cup \{b_{k+1}\}$, wobei $b_{k+1} = x_{n+1}$ oder $x_{n+1} - 1$ ist.

Wenn alle Elemente aus $\mathfrak{B}(x_n)$ schon zur Darstellung von Zahlen $x_\nu \in \mathfrak{M}$, $x_\nu < x_{n+1} - 1$ (durch h Summanden aus $\mathfrak{B}(x_n)$) benötigt werden, stehen für b_{k+1} die beiden Möglichkeiten $b_{k+1} = x_{n+1}$ und $b_{k+1} = x_{n+1} - 1$ offen, sonst setzen wir nur $b_{k+1} = x_{n+1}$. Für $h > 2$ sind in jedem Fall (für $k \geqq 4$) beide Möglichkeiten erlaubt, weil $b_k \leqq x_{n+1} - 3$ sein muß. (Denn wäre $b_k > x_{n+1} - 3$, dann wäre $x_{n+1} \in h\mathfrak{B}(x_n)$.) Also wird b_k auf Grund des Konstruktionsverfahrens — und damit jedes Element aus $\mathfrak{B}(x_n)$ — schon zur Darstellung einer Zahl $x_\nu \in \mathfrak{M}$, $x_\nu < x_{n+1} - 1$ benötigt. — Im Fall $h = 2$ sind für b_{k+1} auch unendlich oft zwei Möglichkeiten erlaubt, denn wenn bei einer Erweiterung $\mathfrak{B}(x_{n+1}) = \mathfrak{B}(x_n) \cup \{b_{k+1}\}$ für b_{k+1} nur die Möglichkeit $b_{k+1} = x_{n+1}$ besteht, dann ist auch $x_{n+1} + 1 \in 2\mathfrak{B}(x_{n+1})$, und daher sind bei der folgenden Erweiterung mit b_{k+2} sicher beide Möglichkeiten erlaubt.

Die Vereinigungsmenge $\mathfrak{B} = \bigcup_{n=s+1}^{\infty} \mathfrak{B}(x_n)$ einer solchen Folge von induktiv auseinander hervorgehenden Zahlenmengen ist

1) Basis der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ (nach Konstruktion),
2) Basis genau h-ter Ordnung für $\mathfrak{M}$ (weil x_{s+1} nur darstellbar ist als
$$x_{s+1} = (x_{s+1} - h + 1) + \sum_{\varkappa=1}^{h-1} 1),$$
3) Minimalbasis 7. Art der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ (denn jedes Element wird zur Darstellung mindestens einer Zahl benötigt; b_{k+1} wird bei obiger Konstruktion sicher zur Darstellung von x_{n+1} benötigt).

Der Klasse $K_7'^h$ der so konstruierten Basen $\mathfrak{B}$ ordnen wir nun in naheliegender Weise einen unendlichen Graphen zu (Fig. 1), derart daß jedem Weg des Graphen umkehrbar eindeutig eine Basis aus der Klasse $K_7'^h$ entspricht. Da die Menge der Wege die Mächtigkeit des Kontinuums hat[3]), folgt, daß die Klasse $K_7'^h$ von der gleichen Mächtigkeit ist. Aus der Tatsache $K_7'^h \leqq K_7^h$ erhält man dann sofort die Behauptung.

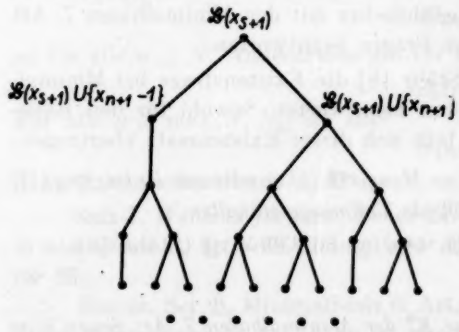


Fig. 1.

Es sei noch bemerkt, daß in diesem Konstruktionsverfahren nochmals ein Existenzbeweis enthalten ist.

Weiter wollen wir anmerken, daß es Mengen $\mathfrak{M}$ gibt, die Minimalbasen 7. Art der Ordnung h ($h \geqq 2$) besitzen, die keine Basen genau h-ter Ordnung für $\mathfrak{M}$ sind. Zum Beispiel besitzt $\mathfrak{M} = \{0; x \equiv 1 \pmod h\}$ sich selbst als Minimalbasis 7. Art der Ordnung h, ist aber keine Basis genau h-ter Ordnung.

[3]) Man vergleiche etwa *Th. Kaluza* jr., Struktur- und Mächtigkeitsaussagen an gewissen unendlichen Graphen mit einigen Anwendungen auf lineare Punktmengen. Math. Ann. **122** (1950), 235—258 (bes. Seite 238).

9. *Asymptotische Minimalbasen 7. Art.* Wir wollen nun zeigen, daß auch andere Klassen von speziellen Minimalbasen 7. Art noch die Mächtigkeit des Kontinuums haben. Wir zeigen zunächst

Satz 13. *Ist $\mathfrak{M}$ unendlich, so hat die Klasse L_7^h der Minimalbasen 7. Art genau h-ter Ordnung ($h \geqq 2$) für $\mathfrak{M}$, bei denen jedes Element zur Darstellung von unendlich vielen Zahlen $x_n \in \mathfrak{M}$ benötigt wird, die Mächtigkeit des Kontinuums.*

Beweis. Wir wenden wieder eine induktive Konstruktionsmethode an. Die Menge $\mathfrak{A}_2$ werde wie im Beweis zu Satz 12 konstruiert, und wir setzen

$$\mathfrak{B}(x_{s+1}) = \mathfrak{A}_2 = \{b_0, b_1, b_2, b_3\} \qquad (b_0 = 0, b_1 = 1).$$

Zu jedem Element $b \in \mathfrak{B}(x_{s+1})$ gibt es dann (nach Konstruktion) eine Zahl $x^*(b) \in \mathfrak{M}$, $x^*(b) \leqq x_{s+1}$, die ohne Benutzung des Elements b nicht mit h Summanden aus $\mathfrak{B}(x_{s+1})$ darstellbar ist. Sei für irgendein $n \geqq s+1$ eine Zahlenmenge

$$\mathfrak{B}(x_n) = \{b_0, b_1, b_2, \ldots, b_k\} \qquad (b_0 = 0, b_1 = 1)$$

schon konstruiert, wobei k von n und $\mathfrak{B}$ abhängt, und in der es zu jedem Element $b_\varkappa \in \mathfrak{B}(x_n)$ eine Zahl $x^*(b_\varkappa) \in \mathfrak{M}$, $x^*(b_\varkappa) \leqq x_n$ gibt, die ohne Benutzung des Elements $b_\varkappa$ nicht mit h Summanden aus $\mathfrak{B}(x_n)$ darstellbar ist, d. h. es gilt $x^*(b_\varkappa) \notin h(\mathfrak{B}(x_n) - \{b_\varkappa\})$. Dann setzen wir

a) wenn $x_{n+1} \in h\mathfrak{B}(x_n)$ ist, $\mathfrak{B}(x_{n+1}) = \mathfrak{B}(x_n)$,

b) wenn $x_{n+1} \notin h\mathfrak{B}(x_n)$ ist, $\mathfrak{B}(x_{n+1}) = \mathfrak{B}^*(x_n) \cup \{b_{k+1}\}$, wobei $\mathfrak{B}^*(x_n)$ und b_{k+1} folgendermaßen bestimmt sind:

Sei $x(b_\varkappa)$ die kleinste Zahl aus $\mathfrak{M}$, die ohne Benutzung des Elements $b_\varkappa \in \mathfrak{B}(x_n)$ nicht mit h Summanden aus $\mathfrak{B}(x_n)$ darstellbar ist; sei also

$$x(b_\varkappa) = \sum_{\nu=1}^{h} b_\varkappa^{(\nu)}, \quad b_\varkappa^{(\nu)} \in \mathfrak{B}(x_n),$$

wobei durch passende Numerierung erreicht werden kann, daß $b_\varkappa^{(1)} = b_\varkappa$ ist, die übrigen $b_\varkappa^{(\nu)}$ können gleich oder ungleich $b_\varkappa$ sein. Wenn ein Summand $b_\varkappa^{(\nu)} \neq b_\varkappa$ ist, so kann man ebenfalls erreichen, daß $b_\varkappa^{(2)} \neq b_\varkappa$ ist. Dann ist die Zahl $x(b_\varkappa) - b_\varkappa^{(2)}$ ($x(b_\varkappa) - b_\varkappa^{(2)}$ braucht nicht in $\mathfrak{M}$ zu liegen) mit $h-1$ Summanden aus $\mathfrak{B}(x_n)$ nicht ohne Benutzung von $b_\varkappa$ darstellbar, denn sonst wäre $x(b_\varkappa) = (x(b_\varkappa) - b_\varkappa^{(2)}) + b_\varkappa^{(2)}$ ohne $b_\varkappa$ darstellbar. — Wenn alle Summanden $b_\varkappa^{(\nu)} = b_\varkappa$ sind (und keine andere Darstellung für $x(b_\varkappa)$ existiert, denn sonst hätte man wieder den vorangehenden Fall), dann ist $x(b_\varkappa) - b_\varkappa$ mit $h-1$ Summanden aus $\mathfrak{B}(x_n)$ nur als

$$x(b_\varkappa) - b_\varkappa = \sum_{\nu=1}^{h-1} b_\varkappa$$

darstellbar; denn sonst ließe $x(b_\varkappa) = (x(b_\varkappa) - b_\varkappa) + b_\varkappa$ noch eine andere Darstellung zu.

Nun setzen wir für die Konstruktion von $\mathfrak{B}(x_{n+1})$ im Fall b) — man vergleiche den Beweis von Satz 12 —

$$(\alpha) \qquad b_{k+1} = x_{n+1} \text{ oder } b_{k+1} = x_{n+1} - 1,$$

letzteres aber nur, wenn alle Elemente aus $\mathfrak{B}(x_n)$ schon zur Darstellung von Zahlen $x_\nu \in \mathfrak{M}$, $x_\nu < x_{n+1} - 1$ benötigt werden; jedoch setzen wir an Stelle von (α)

$$(\beta) \qquad b_{k+1} = x_{n+1} - x(b_\varkappa) + b_\varkappa^{(2)},$$

wenn $x_{n+1} - x(b_\varkappa) + b_\varkappa^{(2)} > x_{n'+1}$ (bzw. $> x_{s+1}$ beim ersten Induktionsschritt dieser Art) ist, wobei $x_{n'+1}$ die größte Zahl aus $\mathfrak{M}$ bedeutet, zu deren Darstellung bei einem früheren

Induktionsschritt ein Element $x_{n'+1} - x(b_{\varkappa'}) + b_{\varkappa'}^{(2)}$ eingeführt wurde, und wenn zwischen $x_{n'+1} - x(b_{\varkappa'}) + b_{\varkappa'}^{(2)}$ und $x_{n+1} - x(b_\varkappa) + b_\varkappa^{(2)}$ mindestens ein Element b_λ liegt, für das bei der Definition die Wahl zwischen zwei Zahlen $x_{n_\lambda+1}$ und $x_{n_\lambda+1} - 1$ bestand.

Im Fall (α) setzen wir $\mathfrak{B}^*(x_n) = \mathfrak{B}(x_n)$, und im Fall ($\beta$) bestimmen wir eine Untermenge $\mathfrak{B}(x_{n+1})$ von $\mathfrak{B}(x_n) \cup \{b_{k+1}\}$ so, daß keine echte Untermenge von $\mathfrak{B}(x_{n+1})$ Basis der Ordnung h für $[0, x_{n+1}] \cap \mathfrak{M}$ ist. Es gilt offenbar dann $b_{k+1} \in \mathfrak{B}(x_{n+1})$ und $\mathfrak{B}(x_{n'+1}) \leqq \mathfrak{B}(x_{n+1})$. Hierdurch wird aus $\mathfrak{B}(x_n)$ eine Teilmenge $\mathfrak{B}^*(x_n)$ ausgesondert, so daß wir schreiben können

$$(\gamma) \qquad \mathfrak{B}(x_{n+1}) = \mathfrak{B}^*(x_n) \cup \{b_{k+1}\}.$$

Damit ist die Existenz von Zahlen $x(b_\varkappa) \in \mathfrak{M}$ für alle Elemente $b_\varkappa \in \mathfrak{B}(x_{n+1})$ gesichert. Nun soll bei den späteren Induktionsschritten $b_\varkappa$ in der Definition (β), d. h. $b_t = x_{n_t+1} - x(b_\varkappa) + b_\varkappa^{(2)}$, $t \to \infty$, alle Elemente der schon konstruierten Zahlenmengen (γ) immer wieder durchlaufen, etwa in der Weise wie in Figur 2 veranschaulicht wird. Die Vereinigungsmenge $\mathfrak{B} = \bigcup_{n=s+1}^{\infty} \mathfrak{B}(x_n)$ jeder solchen Folge von induktiv auseinander hervorgehenden Zahlenmengen ist offenbar Basis genau h-ter Ordnung für $\mathfrak{M}$. Jede solche Basis ist auch Minimalbasis 7. Art der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ und jedes Element wird zur Darstellung von unendlich vielen Zahlen $x_n \in \mathfrak{M}$ benötigt. Zum Beispiel wird $b_\varkappa$ bei obiger Konstruktion, wenn $b_{k+1} = x_{n+1} - x(b_\varkappa) + b_\varkappa^{(2)}$ gesetzt wird, zur Darstellung von $x_{n+1} = (x_{n+1} - x(b_\varkappa) + b_\varkappa^{(2)}) + (x(b_\varkappa) - b_\varkappa^{(2)})$ benötigt, weil $x(b_\varkappa) - b_\varkappa^{(2)}$ mit $h - 1$ Summanden aus $\mathfrak{B}(x_n)$ nicht ohne $b_\varkappa$ darstellbar ist.

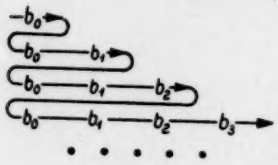


Fig. 2.

Der Klasse $L_7'^h$ der so konstruierten Basen $\mathfrak{B}$ ordnen wir nun wieder einen unendlichen Graphen zu (Fig. 3) derart, daß jedem Weg des Graphen umkehrbar eindeutig eine Basis $\mathfrak{B}$ aus der Klasse $L_7'^h$ entspricht. Da die Menge der Wege die Mächtigkeit des

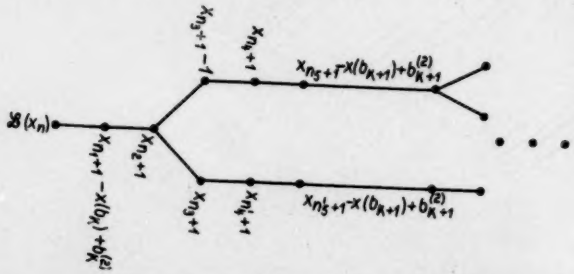


Fig. 3. Wir zeichnen nur einen Ausschnitt des Graphen, um die Konstruktionsmethode noch einmal zu verdeutlichen. Es wurden immer nur die neu definierten Elemente aufgeschrieben.

Kontinuums hat, folgt, daß die Klasse $L_7'^h$ dieselbe Mächtigkeit besitzt, und aus $L_7^h \geqq L_7'^h$ folgt die Behauptung.

Man beachte, daß in dem Konstruktionsverfahren wieder ein Existenzbeweis enthalten ist.

Hieraus erhält man nun sofort eine Antwort auf die von Stöhr [8] aufgeworfene Frage nach asymptotischen Minimalbasen 7. Art. Es gilt

Satz 14. *Für $h \geqq 2$ gibt es zu jeder unendlichen Menge $\mathfrak{M}$ asymptotische Minimalbasen 7. Art der Ordnung h. Die Klasse dieser Minimalbasen hat die Mächtigkeit des Kontinuums.*

Beweis. Die im Beweis zu Satz 13 konstruierten Basen sind asymptotische Minimalbasen 7. Art der Ordnung h für $\mathfrak{M}$, denn die Streichung eines Elements bewirkt, daß unendlich viele Zahlen $x_n \in \mathfrak{M}$ nicht darstellbar sind, also die Restmenge keine asymptotische Basis der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ mehr ist.

10. Allerdings läßt sich der in Nr. 8 erwähnte Existenzsatz für Minimalbasen 7. Art (Satz 11) nicht auf asymptotische Minimalbasen 7. Art übertragen. Damit wird eine von Stöhr aufgeworfene Frage negativ entschieden. Es gilt nämlich der

Satz 15. *Es gibt asymptotische Basen $\mathfrak{B}$ der Ordnung h ($h \geqq 1$), die keine asymptotische Minimalbasis 7. Art der Ordnung h enthalten.*

Beweis. Wir beschränken uns der Einfachheit halber auf $\mathfrak{M} = \mathfrak{Z}$. Sei $\mathfrak{B}$ die asymptotische Basis, die aus der Zahl 0 und allen Zahlen $x \equiv 1 \pmod h$ oberhalb einer Schranke N besteht, also

$$\mathfrak{B} = \{0, th + 1, (t + 1)\, h + 1, (t + 2)\, h + 1, \ldots\},$$

wobei $(t - 1)\, h + 1 < N \leqq th + 1$ ist. Die Basiseigenschaft erkennt man so: Sei $s > th$. Dann ist $sh + 1 \in \mathfrak{B}$, womit auch $sh + 1 \in h\mathfrak{B}$ ist. Ferner gilt:

$sh + 2$ ist darstellbar als Summe zweier Summanden $t_1 h + 1$ und $t_2 h + 1$, wobei man $t_1, t_2 \geqq t$ und $t_1 + t_2 = s$ wählen muß.

$sh + 3$ ist darstellbar als Summe dreier Summanden $t_1 h + 1, t_2 h + 1, t_3 h + 1$, wobei man $t_1, t_2, t_3 \geqq t$ und $t_1 + t_2 + t_3 = s$ wählen muß. Usw.

$sh + h$ ist darstellbar als Summe von h Summanden $t_1 h + 1, t_2 h + 1, t_3 h + 1, \ldots, t_h h + 1$, wobei man $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_h \geqq t$ und $t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_h = s$ wählen muß. Also hat $\mathfrak{B}$ die verlangte Basiseigenschaft.

Das Element 0 wird zur Darstellung unendlich vieler Zahlen benötigt, was man durch Betrachtung der Restklassen mod h erkennt.

Unendlich viele Elemente kann man aus $\mathfrak{B}$ nicht weglassen, ohne die Basiseigenschaft zu zerstören, da jedes Basiselement zu seiner Darstellung sich selbst benötigt. Man kann aber jede beliebige endliche Untermenge wegstreichen, und immer bleibt die Restmenge eine asymptotische Basis der Ordnung h.

Allgemein enthält eine asymptotische Basis $\mathfrak{B}$ der Ordnung h für eine Menge $\mathfrak{M}$ keine asymptotische Minimalbasis 7. Art der Ordnung h für $\mathfrak{M}$, wenn $\mathfrak{B}$ unendlich viele Elemente besitzt, die nur zur Darstellung endlich vieler Zahlen benötigt werden.

11. Manche der Minimalbasisdefinitionen aus § 1 werden bei der Übertragung auf asymptotische Basen bedeutungslos, weil es solche Minimalbasen nicht gibt. Zum Beispiel erhält man sofort den

Satz 16. *Es gibt für keine Menge $\mathfrak{M}$ asymptotische Minimalbasen 4. Art der Ordnung h ($h \geqq 1$).*

Beweis. Angenommen, $\mathfrak{B}$ wäre eine asymptotische Minimalbasis 4. Art der Ordnung h für $\mathfrak{M}$, d. h. für alle $x_n \in \mathfrak{M}$, $x_n \geqq N$ gilt $x_n \in h\mathfrak{B}$, und für jede asymptotische Basis $\tilde{\mathfrak{B}}$ der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ trifft die Ungleichung

$$B(n_i) \leqq \tilde{B}(n_i) \tag{7}$$

für eine unendliche Folge $\{n_i\}$ natürlicher Zahlen zu. Sei nun b das kleinste positive Element in $\mathfrak{B}$. Sei $n_{i-1} < b \leqq n_i$, d. h. $B(n_i) > 0$. Nun wählen wir

$$\tilde{\mathfrak{B}} = \{0, n_{i+1}, n_{i+1} + 1, n_{i+1} + 2, \ldots\},$$

was offenbar eine asymptotische Basis der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ ist. Die Ungleichung

$$\tilde{B}(n_i) = 0 < B(n_i) \tag{8}$$

zeigt dann einen Widerspruch zu (7).

Damit sind auch die Definitionen 1 und 2 für asymptotische Basen inhaltlos.

12. *Minimalbasen 7. Art mit positiver Dichte.* Wir kehren nun wieder zu den gewöhnlichen Minimalbasen 7. Art zurück. Da Minimalbasen 7. Art mit positiver Dichte nur für Mengen $\mathfrak{M}$ mit positiver Dichte existieren können, beschränken wir uns auf den wichtigsten Spezialfall $\mathfrak{M} = \mathfrak{Z}$. Wie in Nr. 3 berichtet, kennt man Basen $\mathfrak{B}$ der Ordnung h (für $\mathfrak{Z}$) mit $B(n) = O\left(n^{\frac{1}{h}}\right)$. Nach dem ebendort genannten Existenzsatz enthält eine solche Basis eine Minimalbasis 7. Art der Ordnung h, also gibt es Minimalbasen $\mathfrak{B}_0$ 7. Art der Ordnung h mit $B_0(n) = O\left(n^{\frac{1}{h}}\right)$. Andererseits gibt es auch Minimalbasen 7. Art der Ordnung h mit der Dichte $\frac{1}{h}$, nämlich z. B. die Basis $\mathfrak{B} = \{0;\ x \equiv 1 \pmod h\}$. Wir wollen nun in Ergänzung zu Nr. 9 zeigen:

Satz 17. *Die Klasse M_7^h der Minimalbasen 7. Art der Ordnung $h (h \geqq 2)$ für $\mathfrak{Z}$ mit positiver Dichte hat die Mächtigkeit des Kontinuums.*

Beweis. Durch die Zahlenmenge $\mathfrak{B}' = \{0, 2;\ x \equiv 1 \pmod{2h}\}$, die also aus den Zahlen 0, 2 und den positiven Elementen der Restklasse $x \equiv 1 \pmod{2h}$ besteht, werden durch h Summanden folgende Restklassen mod $2h$ dargestellt:

$$z \equiv \nu \pmod{2h}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, h$$

durch ν Summanden kongruent $1 \pmod{2h}$ und $h - \nu$ Summanden 0; und die Restklassen

$$z \equiv 2h - \nu \pmod{2h}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, h$$

durch $h - \nu$ Summanden 2 und ν Summanden kongruent $1 \pmod{2h}$, also alle Restklassen, zu deren Darstellung mit h Summanden aus $\mathfrak{B}$ Elemente kongruent $1 \pmod{2h}$ verwendbar sind. Außerdem sind darstellbar die Zahlen $z = 0$ und $z = 2h$.

Es bleibt demnach noch die Restklasse $z \equiv 0 \pmod{2h}$, $z > 2h$.

Um $\mathfrak{B}'$ zu einer Basis der Ordnung h zu ergänzen, fügen wir eine geeignete Teilmenge $\mathfrak{B}''$ der Restklasse $x \equiv 2 \pmod{2h}$ hinzu. Dabei ist $\mathfrak{B}''$ wie folgt bestimmt: Jede Zahl $z \geqq 2h$ der Restklasse $z \equiv 0 \pmod{2h}$ soll durch h Summanden aus $\mathfrak{B}''$ darstellbar sein und jedes Element aus $\mathfrak{B}''$ soll auch zu mindestens einer Darstellung benötigt werden. Ein solches $\mathfrak{B}'' = \{2ht_0 + 2,\ 2ht_1 + 2, \ldots, 2ht_k + 2, \ldots\}$ existiert. Aus den Darstellungen

$$(2ht_{k_1} + 2) + (2ht_{k_2} + 2) + \cdots + (2ht_{k_h} + 2) = 2hs \qquad (s \geqq 1)$$

erhält man

$$t_{k_1} + t_{k_2} + \cdots + t_{k_h} + 1 = s \quad \text{und} \quad t_{k_1} + t_{k_2} + \cdots + t_{k_h} = s^* \qquad (s^* \geqq 0).$$

Hieraus und aus der Minimalforderung für $\mathfrak{B}''$ folgt, daß die Menge der Zahlen t_k eine Minimalbasis 7. Art der Ordnung h (für $\mathfrak{Z}$) bilden muß. Die Klasse dieser Minimalbasen 7. Art hat aber nach Satz 12 die Mächtigkeit des Kontinuums.

Jede auf diese Weise konstruierte Basis $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}' \cup \mathfrak{B}''$ ist Minimalbasis 7. Art der Ordnung h. Denn die Elemente aus der Restklasse $x \equiv 2 \pmod{2h}$ werden nach Konstruktion zur Darstellung der Zahlen $z \equiv 0 \pmod{2h}$ benötigt. Die Elemente $x \equiv 1 \pmod{2h}$ dagegen sind zur Darstellung der Zahlen $z \equiv 1 \pmod{2h}$ notwendig, weil man mit h Summanden 0, kongruent 1 und $2 \pmod{2h}$ keine von den Summanden verschiedene Zahl kongruent $1 \pmod{2h}$ darstellen kann.

Die Klasse $M_7'^h$ der so konstruierten Basen $\mathfrak{B}$ hat nun die Mächtigkeit des Kontinuums, und aus $M_7'^h \leqq M_7^h$ folgt Satz 17.

Eine Menge $\mathfrak{A}$ nichtnegativer ganzer Zahlen soll *periodisch* heißen, wenn es eine ganze Zahl $m \geqq 1$ so gibt, daß oberhalb einer Schranke s aus $a \in \mathfrak{A}$, $a \geqq s$, folgt $a + m \in \mathfrak{A}$. Das bedeutet m. a. W., daß von einer Stelle s ab nur gewisse Restklassen eines Moduls m in $\mathfrak{A}$ enthalten sind.

Da jede periodische Menge nichtnegativer ganzer Zahlen, die das Element 1 enthält, eine positive Dichte besitzt, könnte man vermuten, daß vielleicht alle Minimalbasen 7. Art mit positiver Dichte periodisch sind. Diese Vermutung wird durch Satz 17 widerlegt, da die Klasse der periodischen Zahlenmengen abzählbar ist.

13. Für Satz 13 lag die Fragestellung zugrunde, Basen zu konstruieren, bei denen jedes Element zur Darstellung von unendlich vielen Zahlen benötigt wird; diese Basen sind dann notwendig Minimalbasen 7. Art.

Wir wollen nun die entgegengesetzte Frage stellen, Basen zu konstruieren, bei denen jedes Element zur Darstellung von höchstens endlich vielen Zahlen benötigt wird. Wir können uns dabei auf Minimalbasen 7. Art beschränken. Außerdem wollen wir nur den Fall $\mathfrak{M} = \mathfrak{Z}$ behandeln. Wie wir später in § 6 (Satz 40) zeigen werden, wird in jeder periodischen Basis jedes hinreichend große Element zur Darstellung von nur endlich vielen Zahlen benötigt. Unter Benutzung von Satz 33 folgt also, daß es unendlich viele Minimalbasen 7. Art der Ordnung h ($h \geqq 2$) für $\mathfrak{Z}$ gibt, bei denen jedes hinreichend große Element zur Darstellung von höchstens endlich vielen Zahlen benötigt wird. Wir wollen hier speziell zeigen

Satz 18. *Es gibt unendlich viele Minimalbasen 7. Art der Ordnung $h (h \geqq 2)$ für $\mathfrak{Z}$, bei denen jedes hinreichend große Element zur Darstellung genau einer Zahl benötigt wird.*

Beweis. Die Basis $\mathfrak{B}_0$, die aus den Zahlen $0, 1, 2, 2h-1, 2h$ und den Elementen der Restklasse $x \equiv 0 \pmod{2h-1}$, $x > 4h-2$, besteht, also in kurzer Schreibweise

$$\mathfrak{B}_0 = \{1, 2, 2h;\ x \equiv 0 \pmod{2h-1}\} - \{4h-2\},$$

ist Minimalbasis 7. Art der Ordnung h. Die Basis $\mathfrak{B}_0$ stellen wir durch ein Schema mod $2h-1$ dar (Fig. 4), in dem ein $+$-Zeichen bedeutet, daß $\mathfrak{B}_0$ an dieser Stelle ein

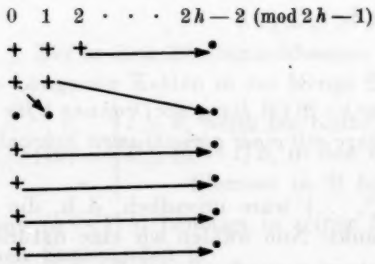


Fig. 4.

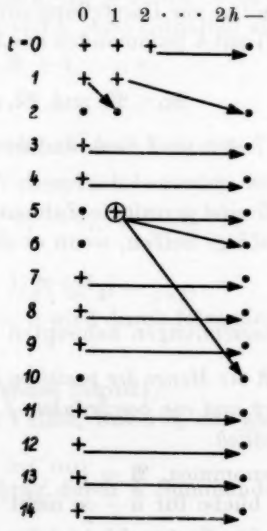


Fig. 5.

Element besitzt; Nichtelemente werden durch Punkte markiert. Zahlen, zu deren Darstellung ein bestimmtes Element benötigt wird, sind durch Pfeile mit diesem Element verbunden. Hierdurch wird die Minimalbasiseigenschaft unmittelbar ersichtlich. Jedes genügend große Element wird zur Darstellung genau einer Zahl $z \equiv 2h-2 \pmod{2h-1}$

benötigt, denn es ist $z \equiv \nu \pmod{2h-1}$, $\nu = 0, 1, \ldots, 2h-4$, darstellbar durch $\left[\frac{\nu}{2}\right]$ Summanden 2, höchstens einen Summanden 1 und mindestens zwei Summanden kongruent 0 $(\mathrm{mod}\ 2h-1)$; und $z \equiv 2h-3 \pmod{2h-1}$ ist darstellbar durch $h-2$ Summanden 2, einen Summanden 1 und einen Summanden kongruent 0 $(\mathrm{mod}\ 2h-1)$ bzw. durch $h-2$ Summanden 2, einen Summanden $2h$ und einen Summanden kongruent 0 $(\mathrm{mod}\ 2h-1)$. Nun fügen wir zu $\mathfrak{B}_0$ ein Element $b = t(2h-1)+1\,(t \geqq 5)$ hinzu (b ist in Fig. 5 durch $\oplus$ angedeutet), wodurch die Elemente $t(2h-1)+0$, $(t+1)(2h-1)+0$ und $2t(2h-1)+0$ gestrichen werden können, denn es gilt ja

$$(t_1(2h-1)+1)+(t_2(2h-1)+1)+(h-2)\,2 = (t_1+t_2)(2h-1)+2h-2.$$

Aber alle hinreichend großen Elemente werden auch nur zur Darstellung genau einer Zahl benötigt.

Da die Auswahl des Elements b offenbar auf unendlich viele Arten geschehen kann, gibt es unendlich viele Minimalbasen 7. Art der Ordnung $h\,(h \geqq 2)$, bei denen jedes hinreichend große Element zur Darstellung genau einer Zahl benötigt wird.

§ 4. Einiges über die Struktur der Minimalbasen 7. Art.

14. In einer Minimalbasis 7. Art für eine Menge $\mathfrak{M}$ wird jedes Element zur Darstellung mindestens einer Zahl $x_n \in \mathfrak{M}$ benötigt. Wir wollen nun versuchen, Aussagen über die Lage der Zahlen $x_n \in \mathfrak{M}$ zu machen, zu deren Darstellung ein gegebenes Element b der Basis benötigt wird. Es sollen allgemeiner beliebige Basen der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ betrachtet werden.

Sei also $\mathfrak{B}$ eine Basis der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ und b ein festes Element aus $\mathfrak{B}$. Dieses Element b wird benötigt zur Darstellung einer Menge $\mathfrak{M}_b$ von Zahlen $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}, \ldots$ aus $\mathfrak{M}$ $(x^{(k)} < x^{(k+1)})$ mit h Summanden aus $\mathfrak{B}$. Dabei kann $\mathfrak{M}_b$ leer, endlich oder unendlich sein. Es gilt also

$$\mathfrak{M}_b \subseteq \mathfrak{M} \text{ und } \mathfrak{M}_b \cap h(\mathfrak{B} - \{b\}) = 0.$$

Die Minimalbasen 7. Art sind dann dadurch charakterisiert, daß $\mathfrak{M}_b$ für kein Element b der Basis leer ist.

Weiterhin soll eine geordnete Zahlenmenge $\mathfrak{C} = \{c_0, c_1, \ldots, c_k, \ldots\}$, $c_k \leqq c_{k+1}$, *von beschränkter Lückenlänge* heißen, wenn es eine Zahl $T = T_{\mathfrak{C}} > 0$ so gibt, daß

$$c_{k+1} - c_k \leqq T_{\mathfrak{C}} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

gilt. Mit diesen Bezeichnungen behaupten wir

Satz 19. *Sei $\mathfrak{A}$ die Menge der positiven Elemente $b \in \mathfrak{B}$ ($\mathfrak{B}$ Basis der Ordnung h für $\mathfrak{M}$), für die $\mathfrak{M}_b$ unendlich und von beschränkter Lückenlänge mit einer gemeinsamen Schranke T ist. Dann ist $\mathfrak{A}$ endlich.*

Beweis. Angenommen, $\mathfrak{A} = \{b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(i)}, \ldots\}$ wäre unendlich, d. h. die Anzahlfunktion $A(n)$ bliebe für $n \to \infty$ nicht beschränkt. Nun wählen wir eine natürliche Zahl n so groß, daß für die Anzahl $\tilde{A}(n)$ der Elemente $\leqq n$ aus $\mathfrak{A}$, die zur Darstellung von Zahlen $\leqq n$ benötigt werden, $\tilde{A}(n) > (T+1)\,h$ ist. Zur Darstellung der Zahlen $x \in \mathfrak{M}$, $n \leqq x \leqq n+T$ mit h Summanden aus $\mathfrak{B}$ wird dann jedes der $A(n)$ positiven Elemente $b^{(i)} \leqq n$ aus $\mathfrak{A}$ mindestens einmal benötigt. Das sind maximal $T+1$ Darstellungen; zu jeder braucht man maximal h positive Summanden. Also braucht man im ganzen maximal $(T+1)\,h$ positive Elemente, womit wir einen Widerspruch erhalten haben.

Versteht man unter einer *Kette* einer Menge $\mathfrak{C} = \{c_0, c_1, \ldots, c_k, \ldots\}$ ganzer Zahlen eine endliche Untermenge $\mathfrak{K} = \{c_{k_0}, c_{k_1}, \ldots, c_{k_{l-1}}\}$ von $\mathfrak{C}$ mit der Eigenschaft

$$c_{k_\lambda} = c_{k_{\lambda-1}} + 1, \quad \lambda = 1, 2, \ldots, l-1,$$

also $\mathfrak{K} = [c_{k_0}, c_{k_{l-1}}]$, und unter der *Kettenlänge* l von $\mathfrak{K}$ die Anzahl der Elemente in $\mathfrak{K}$, so gilt

Satz 20. *Ist $\mathfrak{B}$ eine Basis der Ordnung $h (h \geqq 2)$ für $\mathfrak{M}$ und $b \in \mathfrak{B}$ ein positives Element, so gilt für die Länge der Ketten in $\mathfrak{M}_b$ die Abschätzung*

$$l \leqq (h-1)\, b + 1. \tag{9}$$

Beweis. Angenommen, $\mathfrak{M}_b$ enthält eine Kette der Länge $l > (h-1)\, b + 1$; d. h. zur Darstellung jeder der Zahlen

$$x_{k_0}, x_{k_0} + 1, \ldots, x_{k_0} + l - 1 = x_T$$

aus $\mathfrak{M}$ mit h Summanden aus $\mathfrak{B}$ wird b benötigt. (Im folgenden wollen wir das Anfangsglied der Kette mit x_{k_0} und das Endglied mit x_T bezeichnen.) Dann sind alle Zahlen

$$x_{k_0}, x_{k_0} + 1, \ldots, x_T - b$$

darstellbar mit h Summanden aus $\mathfrak{B}$, wobei sich unter diesen h Summanden mindestens ein Summand 0 befindet (indem man in den Darstellungen für $x_{k_0} + b, \ldots, x_T$ einen Summanden b durch 0 ersetzt), aber nach Voraussetzung auch nur mit Benutzung von b. Also enthalten alle Darstellungen für $x_{k_0} + b, x_{k_0} + b + 1, \ldots, x_T$ mit h Elementen aus $\mathfrak{B}$ zwei Summanden b.

Sei nun schon bewiesen, daß alle Darstellungen für $x_{k_0} + (t-1)\, b, \ldots, x_T$ je t Summanden b enthalten $(1 \leqq t \leqq h-1)$. Dann sind alle Zahlen

$$x_{k_0}, x_{k_0} + 1, \ldots, x_T - tb$$

darstellbar mit h Summanden (darunter t Nullen, die je an die Stelle eines Summanden b getreten sind), aber auch nur mit Benutzung von b. Also enthalten alle Darstellungen für

$$x_{k_0} + tb, x_{k_0} + tb + 1, \ldots, x_T$$

$t + 1$ Summanden b. Alle Darstellungen für

$$x_{k_0} + (h-1)\, b, x_{k_0} + (h-1)\, b + 1, \ldots, x_T$$

enthalten also h Summanden b, was einen Widerspruch bedeutet, wenn

$$x_{k_0} + (h-1)\, b < x_T = x_{k_0} + l - 1$$

ist. Folglich erhalten wir

$$l \leqq (h-1)\, b + 1.$$

Der in Satz 20 ausgeschlossene Fall $b = 0$ wird durch folgenden *Zusatz* erfaßt: Für die Länge der Ketten in der Menge $\mathfrak{M}_0$ gilt

$$\begin{cases} l \leqq h, \text{ wenn die Kette mit 0 selbst beginnt,} \\ l \leqq (h-1)\, b_1 \text{ in den übrigen Fällen, wobei } b_1 \text{ das kleinste positive} \\ \qquad \text{Element in } \mathfrak{B} \text{ bedeutet.} \end{cases} \tag{10}$$

Denn $(h-1)\, b_1$ benötigt in seiner Darstellung durch h Summanden aus $\mathfrak{B}$ höchstens einen Summanden 0.

Eine gewisse Verbesserung bringen die folgenden Sätze:

Satz 21. *Sei $\mathfrak{B}$ eine Basis der Ordnung $h (h \geqq 2)$ für $\mathfrak{M}$ und $b \geqq h-1$ ein Element aus $\mathfrak{B}$, zu dem es ein positives Element $b_1 < b$ in $\mathfrak{B}$ gibt. (Es ist also $b_1 \geqq 1$.) Dann gilt für die Länge der Ketten in $\mathfrak{M}_b$, falls das Endglied der Kette $x_T \neq hb$ ist,*

$$l \leqq (h-1)\, b - h + 1. \tag{11}$$

Beweis. Angenommen, es gäbe unter den genannten Bedingungen eine Kette der Länge $l > (h-1)\,b - h + 1$. Dann enthalten nach der Schlußweise von Satz 20 alle Darstellungen für

$$x_{k_0} + (h-2)\,b,\ x_{k_0} + (h-2)\,b + 1, \ldots, x_T$$

mit h Summanden aus $\mathfrak{B}$ sicher $h-1$ Summanden b. Daraus folgt, daß

$$x_{k_0} - b,\ x_{k_0} - b + 1, \ldots, x_T - (h-1)\,b$$

in $\mathfrak{B}$ liegen. Weil die Kettenlänge $l > (h-1)\,b - h + 1$ sein soll, ist

$$x_T - (h-1)\,b > \left(x_{k_0} + (h-1)\,b - h\right) - (h-1)\,b = x_{k_0} - h.$$

Daher wäre die Zahl $\left(x_T - (h-1)\,b\right) + \sum_{\varkappa=1}^{h-1} b_1 \in [x_{k_0}, x_T]$ und, da $x_T - (h-1)\,b \neq b$ ist, wäre sie im Widerspruch zur Voraussetzung ohne Summanden b darstellbar.

Satz 22. *Sei $\mathfrak{B}$ eine Basis der Ordnung $h (h \geqq 2)$ für $\mathfrak{M}$ und $b \geqq \max(h, 3)$ ein Element aus $\mathfrak{B}$. Dann gilt für die Länge der Ketten in $\mathfrak{M}_b$, falls das Endglied der Kette $x_T = hb$ ist, ebenfalls*

$$l \leqq (h-1)\,b - h + 1. \tag{12}$$

Beweis. Angenommen, es gäbe unter den genannten Voraussetzungen eine Kette der Länge $l > (h-1)\,b - h + 1$. Dann ist das Anfangsglied der Kette

$$x_{k_0} = x_T - l + 1 < hb - (h-1)\,b + h = b + h.$$

Die Darstellung für $x_T - 1$ mit h Elementen aus $\mathfrak{B}$ enthält $h-1$ Summanden b. Denn $(x_T - 1) - b$ ist mit h Elementen aus $\mathfrak{B}$ nicht ohne Benutzung von b darstellbar. Also enthält $x_T - 1$ zwei Summanden b. Die Zahl $(x_T - 1) - 2b$ ist mit h Elementen aus $\mathfrak{B}$ nicht ohne Benutzung von b darstellbar, also enthält $x_T - 1$ drei Summanden b. In dieser Weise fährt man fort. Dann ist die Zahl $(x_T - 1) - (h-2)\,b$ wegen $(x_T - 1) - (h-2)\,b \geqq x_T - (h-1)\,b + h - 1 \geqq x_{k_0}$ mit h Elementen aus $\mathfrak{B}$ nicht ohne Benutzung von b darstellbar, also enthält $x_T - 1$ sicher $h-1$ Summanden b.

Daher hat $x_T - 1$ die Darstellung $x_T - 1 = (h-1)\,b + (b-1)$ und $b - 1$ ist ein Element von $\mathfrak{B}$. Andererseits erhält man aus der Voraussetzung

$$b \geqq 3 \geqq \frac{2h-1}{h-1}, \quad \text{d. h. } (h-1)\,b \geqq 2h - 1$$

die Ungleichung

$$hb - h \geqq hb - (h-1)\,b + h - 1 \text{ und damit } (b-1)\,h \geqq x_{k_0}.$$

Das besagt, da $b - 1 \in \mathfrak{B}$ ist, daß $h(b-1) \in [x_{k_0}, x_T]$ im Widerspruch zur Voraussetzung ohne Benutzung von b darstellbar wäre[4]).

Satz 23. *Sei $\mathfrak{B}$ eine Basis der Ordnung $h (h \geqq 2)$ für $\mathfrak{M}$ und $b \geqq 2h - 3$ ein Element aus $\mathfrak{B}$, zu dem es ein Element b_1 in $\mathfrak{B}$ mit $2 \leqq b_1 \leqq b - 1$ gibt. Dann gilt für die Länge der Ketten in $\mathfrak{M}_b$, falls das Endglied der Kette $x_T \neq hb$ ist,*

$$l \leqq (h-1)\,b - 2h + 3. \tag{13}$$

Beweis. Angenommen, es gäbe unter den genannten Voraussetzungen eine Kette der Länge $l > (h-1)\,b - 2h + 3$. Dann enthalten die Darstellungen für

$$x_{k_0} + (h-2)\,b, \ldots, x_T$$

[4]) Die Notwendigkeit der Voraussetzung $b \geqq 3$ zeigt ein Beispiel. Eine Basis $\mathfrak{B}$ zweiter Ordnung für $\mathfrak{Z}$ mit $\mathfrak{B} \cap [0,5] = \{0, 1, 2, 5\}$ benötigt zur Darstellung von $z = 3, 4$ das Element 2. Die Kettenlänge in $\mathfrak{Z}_2$ müßte nach (12) aber kleiner oder gleich $(2-1)\,2 - 2 + 1 = 1$ sein.

$h-1$ Summanden b. Daraus folgt, daß $x_{k_0}-b, \ldots, x_T-(h-1)\,b$ Elemente von $\mathfrak{B}$ sind. Und es gilt $x_T-(h-1)\,b \neq b$. Weil die Kettenlänge $l > (h-1)\,b-2h+3$ sein soll, ist

$$x_T-(h-1)\,b > x_{k_0}-2h+2.$$

Daher wäre $(x_T-(h-1)\,b)+\sum_{\varkappa=1}^{h-1} b_1 \in [x_{k_0}, x_T]$, was im Widerspruch zur Voraussetzung steht.

15. Wir wollen nun eine ähnliche Frage aufwerfen. Sei $\mathfrak{B}$ eine Basis der Ordnung h $(h \geqq 2)$ für $\mathfrak{M}$. Sei $\mathfrak{N}_t = \{x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}, \ldots\}$, $x^{(k)} < x^{(k+1)}$, eine Untermenge von Zahlen aus $\mathfrak{M}$, deren Darstellung nicht mit weniger als t Summanden aus $\mathfrak{B}$ möglich ist $(2 \leqq t \leqq h)$. Es gilt also $\mathfrak{N}_t \subseteq \mathfrak{M}$ und

$$\mathfrak{N}_t \cap (t-1)\,\mathfrak{B} = \mathfrak{O} \qquad (\mathfrak{O} = \text{leere Menge}).$$

Dabei kann $\mathfrak{N}_t$ leer, endlich oder unendlich sein. Dann können wir zeigen

Satz 24. *Die Ketten in $\mathfrak{N}_t$ haben die Länge*

$$l \leqq \frac{x_{k_0}-1}{t-1}\,(h-t+1), \tag{14}$$

wenn mit x_{k_0} das Anfangsglied der Kette bezeichnet wird und $\mathfrak{M}$ die positiven Elemente des Intervalls $[x_{k_0}-(t-2)\,(x_{k_0}-1),\ x_{k_0}+l-1]$ enthält.

Beweis. Wir wenden Induktion nach t an $(t \geqq 2)$. Genau bei *den* Zahlen $x_n \in \mathfrak{M}$ kommt man in der Darstellung mit einem Summanden aus, die in $\mathfrak{B}$ enthalten sind. Wenn $b \in \mathfrak{B}$ ist, dann kann eine Kette in $\mathfrak{N}_2$, die mit $b+1$ beginnt, höchstens die Länge $l = (h-1)\,b = (h-1)\,(x_{k_0}-1)$ haben, da in diesem Fall spätestens $hb+1$ wieder ein Element in $\mathfrak{B}$ ist.

Sei die Behauptung schon für alle $\tau \leqq t-1$ bewiesen. Angenommen nun, für t wäre die Behauptung falsch, d. h. es gibt eine Kette in $\mathfrak{N}_t$ mit der Länge $l > \frac{x_{k_0}-1}{t-1}\,(h-t+1)$. Dann gilt für das Endglied der Kette

$$x_T = x_{k_0}+l-1 > x_{k_0}+\frac{x_{k_0}-1}{t-1}\,(h-t+1)-1 = \frac{x_{k_0}h-h}{t-1} = \frac{(x_{k_0}-1)\,h}{t-1}. \tag{15}$$

Ferner sind, wie man leicht erkennt, die Durchschnitte

$$\mathfrak{B} \cap [x_{k_0}, x_T],\quad \mathfrak{B} \cap \left[\frac{x_{k_0}}{2}, \frac{x_T}{2}\right], \ldots, \mathfrak{B} \cap \left[\frac{x_{k_0}}{t-1}, \frac{x_T}{t-1}\right]$$

leer.

Angenommen (Fig. 6), $\mathfrak{B}$ enthielte ein Element b in einem Intervall $\frac{x_T}{y} < b < \frac{x_{k_0}}{y-1}$ $(2 \leqq y \leqq t-1)$.

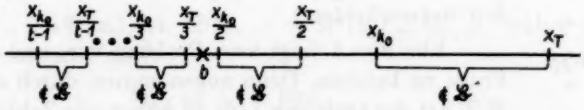


Fig. 6.

Dann dürfen die Zahlen

$$x_{k_0}-(y-1)\,b, \ldots, x_T-(y-1)\,b$$

auf Grund der Eigenschaft von $\mathfrak{N}_t$ nicht mit weniger als $t-y+1$ Summanden aus $\mathfrak{B}$ darstellbar sein. Das ist eine Kette der Länge

$$l^* > \frac{x_{k_0}-1}{t-1}\,(h-t+1);$$

nach Induktionsvoraussetzung muß aber gelten

$$l^* \leqq \frac{x_{k_0} - (y-1)\,b - 1}{t-y}\,(h-t+y).$$

Wir erhalten einen Widerspruch, wenn wir zeigen

$$\text{(16)} \qquad \frac{x_{k_0}-1}{t-1}\,(h-t+1) \geqq \frac{x_{k_0}-(y-1)\,b-1}{t-y}\,(h-t+y).$$

Dazu gehen wir aus von der Ungleichung

$$1 \leqq \frac{h-t}{y} + 1$$

und erhalten durch leichte Umformung

$$(x_{k_0}-1)\,h \leqq \frac{(x_{k_0}-1)\,h}{y(t-1)}\,(h-t+y)\,(t-1)$$

und, weil $\dfrac{(x_{k_0}-1)\,h}{y(t-1)} < \dfrac{x_T}{y} < b$ ist,

$$(x_{k_0}-1)\,h \leqq b(h-t+y)\,(t-1),$$

$$(x_{k_0}-1)\,h\big((t-y)-(t-1)\big) \geqq -(y-1)\,b(h-t+y)\,(t-1),$$

und durch Division mit $(t-1)\,(t-y)$

$$\frac{(x_{k_0}-1)\,h}{t-1} - \frac{(x_{k_0}-1)\,(t-1)}{t-1} \geqq \frac{(x_{k_0}-1)\,h}{t-y} - \frac{(x_{k_0}-1)\,(t-y)}{t-y} - \frac{(y-1)\,b}{t-y}\,(h-t+y),$$

$$\frac{x_{k_0}-1}{t-1}\,(h-t+1) \geqq \frac{x_{k_0}-(y-1)\,b-1}{t-y}\,(h-t+y).$$

Damit ist (16) bewiesen. Also ist

$$\mathfrak{B} \cap \left[\frac{x_{k_0}}{t-1},\, x_T\right]$$

leer. Durch Elemente $b_k \in \mathfrak{B}$, $b_k \leqq \dfrac{x_{k_0}-1}{t-1}$ sind dann nicht alle Zahlen $x_n \leqq x_T$ darstellbar, denn nach (15) ist $x_T > \dfrac{(x_{k_0}-1)\,h}{t-1}$.

16. Eine Frage, die hier noch zu untersuchen wäre, ist: Gibt es zu jeder Minimalbasis $\mathfrak{B}$ 7. Art der Ordnung h für eine Menge $\mathfrak{M}$ unendlich viele Zahlen $x_n \in \mathfrak{M}$, die eindeutig durch h Summanden aus $\mathfrak{B}$ darstellbar sind? (Dabei sollen zwei Darstellungen einer Zahl x_n verschieden heißen, wenn sie sich nicht nur durch die Reihenfolge der Summanden unterscheiden.)

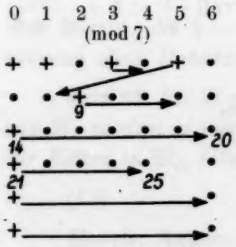


Fig. 7.

Für $h = 1$ liegt kein Problem vor, und für $h = 2$ ist die Frage zu bejahen. Denn angenommen, durch eine Minimalbasis $\mathfrak{B}$ 7. Art der Ordnung 2 für $\mathfrak{M}$ wären alle Zahlen $x_n \in \mathfrak{M}$, $x_n \geqq N$ mehrdeutig darstellbar. Sei dann $b \in \mathfrak{B}$, $b > N$. Dieses Element b wird benötigt zur Darstellung einer Zahl $x(b) \in \mathfrak{M}$,

$$x(b) = b + b^{(1)} = b + b^{(2)}, \quad b^{(1)} \neq b^{(2)}; \quad b^{(1)}, b^{(2)} \in \mathfrak{B},$$

was einen Widerspruch bedeutet.

Für $h = 3$ wollen wir jedoch im Fall $\mathfrak{M} = \mathfrak{Z}$ ein Gegenbeispiel geben. Wir benutzen dazu wieder das Schema, wie es in Nr. 13 eingeführt wurde (Fig. 7).

Alle genügend großen Zahlen $z \in \mathfrak{Z}$ sind auf mindestens zwei Arten darstellbar, weil folgende Kongruenzen mod 7 gelten:

$$\begin{aligned} 0 &\equiv 0 + 0 + 0, \\ 1 &\equiv 0 + 0 + 1, \\ 2 &\equiv 0 + 0 + 2, \\ 3 &\equiv 0 + 0 + 3, \\ 4 &\equiv 0 + 1 + 3 \\ &\equiv 0 + 2 + 2, \\ 5 &\equiv 0 + 0 + 5, \\ 6 &\equiv 0 + 1 + 5 \\ &\equiv 0 + 3 + 3. \end{aligned}$$

Allgemein kann man sagen, daß durch eine Basis $\mathfrak{B}$ der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ genau die Zahlen $x_n \in \mathfrak{M}$ eindeutig darstellbar sind, zu deren Darstellung alle h Summanden benötigt werden.

§ 5. Unter- und Obermengen von Minimalbasen 7. Art.

17. Um die Minimalbasen 7. Art noch etwas näher zu charakterisieren, wollen wir folgenden Satz beweisen:

Satz 25. *Zu jeder unendlichen Menge $\mathfrak{M} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ und jeder endlichen Menge $\mathfrak{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ nichtnegativer ganzer Zahlen gibt es eine Minimalbasis $\mathfrak{B}$ 7. Art genau h-ter Ordnung ($h \geqq 2$) für $\mathfrak{M}$ (ohne Bedingung (1)) mit der Eigenschaft $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir uns, da jede Basis nach Definition das Element 0 enthält, auf positive a_ϱ ($\varrho = 1, 2, \ldots, r$) beschränken. Wir führen den Beweis durch Induktion nach h.

I) Zuerst behandeln wir — ebenfalls durch eine induktive Konstruktionsmethode — den Fall $h = 2$. Für ein Element $x_{n_0} \in \mathfrak{M}$ gilt

$$x_{n_0 - 1} < \max_{\varrho = 1, \ldots, r} a_\varrho \leqq x_{n_0} = T.$$

Mit dieser Bezeichnung setzen wir nun

$$\mathfrak{A}_0 = (\mathfrak{A} \cup \mathfrak{M}) \cap [0, T] = \{a'_1, a'_2, \ldots, a'_s\} = \mathfrak{B}(x_{n_0}).$$

(Dabei können wir annehmen, daß $a'_1 = 0$ ist.)

Ist für ein $n \geqq n_0$ eine Zahlenmenge $\mathfrak{B}(x_n) = \{b_0, b_1, \ldots, b_k\}$ schon konstruiert, so setzen wir

a) wenn $x_{n+1} \in 2\mathfrak{B}(x_n)$ ist, $\mathfrak{B}(x_{n+1}) = \mathfrak{B}(x_n)$,

b) wenn $x_{n+1} \notin 2\mathfrak{B}(x_n)$ ist, $\mathfrak{B}(x_{n+1}) = \mathfrak{B}^*(x_n) \cup \{b_{k+1}\}$, wobei b_{k+1} und $\mathfrak{B}^*(x_n)$ folgendermaßen bestimmt sind:

(α) $\qquad b_{k+1} = x_{n+1}$ bzw.

(β) $\qquad b_{k+1} = x_{n+1} - a'_\varrho$ ($\varrho = 2, \ldots, s$).

Der letztere Fall tritt immer dann ein, wenn $x_{n+1} - a'_\varrho > x_{n'+1}$ (bzw. $> T$ beim ersten Induktionsschritt dieser Art) ist, wobei $x_{n'+1}$ die größte Zahl aus $\mathfrak{M}$ bedeutet, zu deren Darstellung bei einem früheren Induktionsschritt ein Element $x_{n'+1} - a'_{\varrho_1}$ eingeführt wurde.

Im Fall (α) setzen wir $\mathfrak{B}^*(x_n) = \mathfrak{B}(x_n)$, und im Fall ($\beta$) bestimmen wir eine Untermenge $\tilde{\mathfrak{B}}(x_{n+1})$ von $\mathfrak{B}(x_n) \cup \{b_{k+1}\}$ so, daß $\tilde{\mathfrak{B}}(x_{n+1})$ Basis der Ordnung 2 für $\mathfrak{M} \cap [0, x_{n+1}]$

ist und keine echte Untermenge von $\widetilde{\mathfrak{B}}(x_{n+1})$ diese Eigenschaft besitzt. Es gilt offenbar dann $b_{k+1} \in \widetilde{\mathfrak{B}}(x_{n+1})$ und wir definieren für den Fall (β)

$$\widetilde{\mathfrak{B}}(x_{n+1}) \cup \mathfrak{A}_0 = \mathfrak{B}^*(x_n) \cup \{b_{k+1}\} = \mathfrak{B}(x_{n+1}).$$

Nun soll a'_ϱ bei den Induktionsschritten der Form (β) alle positiven Elemente von $\mathfrak{A}_0$ durchlaufen, was nach endlich vielen Schritten der Fall ist; von da an erfolgen die Induktionsschritte allein nach der Form (α).

Die Vereinigungsmenge $\mathfrak{B} = \bigcup_{n=n_0}^{\infty} \mathfrak{B}(x_n)$ erfüllt dann folgende Eigenschaften mit $h = 2$:

$\mathfrak{B}$ ist

1) Basis der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ (nach Konstruktion),

2) Basis genau h-ter Ordnung für $\mathfrak{M}$; sogar wird jedes (positive) Element a_ϱ ($\varrho = 1, \ldots, r$) zur Darstellung einer Zahl $x(a_\varrho) \in \mathfrak{M}$ benötigt, die nur mit h (positiven) Summanden aus $\mathfrak{B}$ möglich ist (folgt aus Fall b) (β) der Konstruktion);

3) Minimalbasis 7. Art der Ordnung $h = 2$ für $\mathfrak{M}$ (nach Konstruktion),

4) Obermenge von $\mathfrak{A}$ [5]).

II. Sei schon gezeigt, daß es für eine Ordnung $h (h \geqq 2)$ eine Basis $\widetilde{\mathfrak{B}}$ für $\mathfrak{M}$ gibt, die die Eigenschaften 1) bis 4) erfüllt. Es gibt also zu jedem Element $a_\varrho \in \mathfrak{A}$ eine Zahl $x(a_\varrho) \in \mathfrak{M}$, die mit h Summanden aus $\widetilde{\mathfrak{B}}$ nicht ohne Benutzung des Elements a_ϱ und nur mit h positiven Summanden aus $\widetilde{\mathfrak{B}}$ darstellbar ist; d. h. es gilt

$$x(a_\varrho) \notin h(\widetilde{\mathfrak{B}} - \{a_\varrho\}), \quad x(a_\varrho) \in (h-1)\,\mathfrak{B}.$$

Wir setzen $\max\limits_{\varrho=1,\ldots,r} x(a_\varrho) = x_{m_0} = X$ und die endliche Menge $\{x(a_1), \ldots, x(a_r)\} = \mathfrak{N}$.

Die Menge $\mathfrak{C}'_0$ der Elemente $b \leqq X$ aus $\widetilde{\mathfrak{B}}$ bildet nun eine Basis der Ordnung h für $\mathfrak{M} \cap [0, X]$.

Aus $\mathfrak{C}'_0$ wählen wir jetzt eine Teilmenge $\mathfrak{C}_0$ aus derart, daß $(h+1)\,\mathfrak{C}_0 \geqq \mathfrak{M} \cap [0, X]$ und $h\mathfrak{C}_0 \geqq \mathfrak{N}$ ist und keine echte Untermenge von $\mathfrak{C}_0$ diese Eigenschaften besitzt. Eine solche Auswahl ist, da es sich hier um endliche Mengen handelt, natürlich möglich. Ersichtlicherweise gilt auch $\mathfrak{A} \leqq \mathfrak{C}_0$.

Nun verwenden wir wieder die induktive Konstruktionsmethode aus Teil I.

Dazu setzen wir $\mathfrak{C}_0 = \mathfrak{B}(x_{m_0})$. Ist für ein $n \geqq m_0$ eine Zahlenmenge

$$\mathfrak{B}(x_n) = \{b_0, b_1, \ldots, b_k\}$$

schon konstruiert, so setzen wir

a) wenn $x_{n+1} \in (h+1)\,\mathfrak{B}(x_n)$ ist, $\mathfrak{B}(x_{n+1}) = \mathfrak{B}(x_n)$,

b) wenn $x_{n+1} \notin (h+1)\,\mathfrak{B}(x_n)$ ist, $\mathfrak{B}(x_{n+1}) = \mathfrak{B}^*(x_n) \cup \{b_{k+1}\}$, wobei b_{k+1} und $\mathfrak{B}^*(x_n)$ folgendermaßen bestimmt sind:

(α) $\qquad b_{k+1} = x_{n+1}$ bzw.

(β) $\qquad b_{k+1} = x_{n+1} - x(a_\varrho)$ $(\varrho = 1, \ldots, r)$;

der letztere Fall tritt immer dann ein, wenn $x_{n+1} - x(a_\varrho) > x_{n'+1}$ (bzw. $> X$ beim ersten Induktionsschritt dieser Art) ist, wobei $x_{n'+1}$ die größte Zahl aus $\mathfrak{M}$ bedeutet, zu deren Darstellung bei einem früheren Induktionsschritt ein Element $x_{n'+1} - x(a_{\varrho_1})$ eingeführt wurde.

Im Fall (α) setzen wir $\mathfrak{B}^*(x_n) = \mathfrak{B}(x_n)$, und im Fall ($\beta$) bestimmen wir eine Untermenge $\widetilde{\mathfrak{B}}(x_{n+1})$ von $\mathfrak{B}(x_n) \cup \{b_{k+1}\}$, so daß $\widetilde{\mathfrak{B}}(x_{n+1})$ Basis der Ordnung $h+1$ für

[5]) Im Fall $\mathfrak{M} = \mathfrak{Z}$ läßt sich der Schritt I ($h = 2$) einfacher durchführen: Sei m eine natürliche Zahl mit $m > a_\varrho (\varrho = 1, \ldots, r)$. Dann leistet die Basis $\mathfrak{B} = \{1, 2, \ldots, m-1;\ x \equiv 0 (\mathrm{mod}\ m)\}$ das Verlangte.

$\mathfrak{M} \cap [0, x_{n+1}]$ ist und keine echte Untermenge von $\widetilde{\mathfrak{B}}(x_{n+1})$ diese Eigenschaft besitzt. Es gilt offenbar dann $b_{k+1} \in \widetilde{\mathfrak{B}}(x_{n+1})$ und wir definieren für den Fall (β)

$$\widetilde{\mathfrak{B}}(x_{n+1}) \cup \mathfrak{C}_0 = \mathfrak{B}^*(x_n) \cup \{b_{k+1}\} = \mathfrak{B}(x_{n+1}).$$

(Hierbei wird bei der Darstellung von x_{n+1} durch $h+1$ Summanden aus $\mathfrak{B}(x_{n+1})$ das Element a_ϱ benötigt, denn es ist $x_{n+1} = (x_{n+1} - x(a_\varrho)) + x(a_\varrho)$ und $x(a_\varrho)$ ist mit h Summanden aus $\mathfrak{C}_0$ nicht ohne a_ϱ darstellbar.)

Nun soll a_ϱ bei den Induktionsschritten der Form (β) alle Elemente von $\mathfrak{A}$ durchlaufen, was nach endlich vielen Schritten der Fall ist; von da an erfolgen die Induktionsschritte allein nach der Form (α). Die Vereinigungsmenge $\mathfrak{B} = \bigcup_{n=m_0}^{\infty} \mathfrak{B}(x_n)$ erfüllt, wie man sich leicht überlegt, für die Ordnung $h+1$ die Bedingungen 1) bis 4), womit der Beweis für Satz 25 erbracht ist.

Bemerkung. Satz 25 läßt sich dahin erweitern, daß es sogar eine Klasse mit der Mächtigkeit des Kontinuums von Basen gibt, die die dort angegebenen Eigenschaften besitzen. Der Beweis hierfür ergibt sich, indem man die im Beweis von Satz 25 benutzte Konstruktionsmethode mit der im Beweis zu Satz 12 verwandten Konstruktionsmethode kombiniert. Aus Satz 25 beweisen wir

Satz 26. *Es gibt zu jeder (unendlichen) Menge $\mathfrak{M}$ Minimalbasen 7. Art der Ordnung h, die beliebig viele getrennte Ketten enthalten, deren Längen und deren Reihenfolge vorgegeben sind.*

Beweis. Man wähle für die Menge $\mathfrak{A}$ in Satz 25 eine Kette endlicher Länge. Dann gibt es eine Basis $\widetilde{\mathfrak{B}}_1$ der Ordnung h für eine Menge $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{M} \cap [0, N_1]$, die diese Kette enthält, mit der Eigenschaft, daß keine echte Untermenge von $\widetilde{\mathfrak{B}}_1$ Basis der Ordnung h für $\mathfrak{N}_1$ ist.

Zu einer Kette $\mathfrak{A}_1$ endlicher Länge oberhalb N_1 gibt es wieder eine Basis $\widetilde{\mathfrak{B}}_2$ der Ordnung h für eine Menge $\mathfrak{N}_2 = \mathfrak{M} \cap [0, N_2]$, die diese Kette $\mathfrak{A}_1$ und $\widetilde{\mathfrak{B}}_1$ enthält, mit der Eigenschaft, daß keine echte Untermenge von $\widetilde{\mathfrak{B}}_2$ Basis der Ordnung h für $\mathfrak{N}_2$ ist.

In dieser Weise fortfahrend erhält man die Behauptung.

Eine gewisse Verschärfung von Satz 25 bringt

Satz 27. *Zu jeder unendlichen Menge $\mathfrak{M}$ und jeder endlichen Menge $\mathfrak{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ nichtnegativer ganzer Zahlen gibt es eine asymptotische Minimalbasis $\mathfrak{B}$ 7. Art genau h-ter Ordnung ($h \geqq 2$) für $\mathfrak{M}$ mit der Eigenschaft $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$.*

Beweis. Im Beweis zu Satz 25 wurde eine Basis $\widetilde{\mathfrak{B}}$ der genauen Ordnung h für eine Zahlenmenge $\mathfrak{N} = \mathfrak{M} \cap [0, N]$ konstruiert, so daß $\mathfrak{A} \leqq \widetilde{\mathfrak{B}}$ und keine echte Untermenge von $\widetilde{\mathfrak{B}}$ Basis der Ordnung h für $\mathfrak{N}$ ist. Aus $\widetilde{\mathfrak{B}}$ konstruieren wir nun nach der Methode, wie sie im Beweis zu Satz 13 enthalten ist, eine asymptotische Minimalbasis $\mathfrak{B}$ 7. Art der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ mit der Eigenschaft $\widetilde{\mathfrak{B}} < \mathfrak{B}$.

18. Für eine unendliche Menge $\mathfrak{A}$ ist ein so glattes Ergebnis wie in Satz 25 nicht zu erwarten. Ein Beispiel für den Fall $\mathfrak{M} = \mathfrak{Z}$ soll die Lage skizzieren. Sei $\mathfrak{A}$ die Zahlenmenge, die aus den positiven Zahlen der Restklasse $x \equiv 1 \pmod h$ besteht, also $\mathfrak{A} = \{x \equiv 1 \pmod h\}$. Dann enthält die Minimalbasis $\mathfrak{B} = \{0; x \equiv 1 \pmod h\}$ 7. Art der Ordnung h die Zahlenmenge $\mathfrak{A}$.

Andererseits sei $\mathfrak{A} = \{1, h+1, 2h+1, \ldots, (t-1)h+1, th, (t+1)h+1, (t+2)h+1, \ldots\}$. Dann gibt es, wie man sich leicht überlegt, keine Minimalbasis 7. Art der Ordnung h ($h \geqq 2$), die $\mathfrak{A}$ enthält.

Man könnte nun vermuten, daß jede Minimalbasis 7. Art der Ordnung h in einer Minimalbasis 7. Art der Ordnung $h-1$ enthalten wäre. Im Fall $\mathfrak{M} = \mathfrak{Z}$ gilt dieser Satz für $h = 2$ trivialerweise. Allgemein wollen wir jedoch die Aussage an Hand eines Beispiels widerlegen. Wir beschränken uns auf $\mathfrak{M} = \mathfrak{Z}$ und nehmen $h \geqq 5$ an. $\mathfrak{B}_h = \{0; x \equiv 1 \pmod h\}$ ist Minimalbasis 7. Art der Ordnung h. Die Minimalbasis 7. Art der Ordnung $h-1$, die $\mathfrak{B}_h$ enthalten soll, bezeichnen wir mit $\mathfrak{B}_{h-1}$. Die Menge $(h-1)\,\mathfrak{B}_h$ enthält nicht die Zahlen $z \in \mathfrak{Z}$, zu deren Darstellung man h positive Summanden aus $\mathfrak{B}_h$ benötigt, also in unserem Fall die Zahlen $z \equiv 0 \pmod h$. Wir betrachten zwei Fälle:

a) $\mathfrak{B}_{h-1}$ enthält außer den Elementen von $\mathfrak{B}_h$ nur Elemente $a_i \equiv 0 \pmod h$ (dann notwendig unendlich viele). Sei $th \in \mathfrak{B}_{h-1}$ $(t \geqq 2)$; dann ist $\mathfrak{B}_{h-1} - \{th+1\}$ ebenfalls Basis der Ordnung $h-1$, denn $th+1$ ist darstellbar als Summe der Elemente th und 1, und die Zahlen $z \equiv 0 \pmod h$ sind darstellbar als Summe von $h-1$ Summanden kongruent $0 \pmod h$. Somit kann $\mathfrak{B}_{h-1}$ keine Minimalbasis 7. Art der Ordnung $h-1$ sein.

b) $\mathfrak{B}_{h-1}$ enthält außer den Elementen von $\mathfrak{B}_h$ noch ein Element $a_i \not\equiv 0 \pmod h$. Sei $a_i = sh + \alpha_i$ $(2 \leqq \alpha_i \leqq h-1)$. Durch $h-2$ Summanden 0, a_i und Elemente $x \equiv 1 \pmod h$ sind dann Zahlen $qh + (h-1) \geqq h$ und $q'h \geqq h$ darstellbar. $\mathfrak{B}_{h-1} - \{th+1\}$, wobei $th+1$ genügend größer als a_i ist, ist dann ebenfalls Basis der Ordnung $h-1$, also $\mathfrak{B}_{h-1}$ keine Minimalbasis 7. Art. Denn $th+1$ ist darstellbar als $((t-q')\,h+1) + (q'h)$ mit $h-1$ Summanden aus $\mathfrak{B}_{h-1} - \{th+1\}$; und eine Zahl $Th+h$, zu deren Darstellung mit $h-1$ Summanden aus $\mathfrak{B}_{h-1}$ das Element $th+1$ etwa benötigt würde, ist darstellbar als $((T-q)\,h+1) + (qh+h-1)$ mit $h-1$ Summanden aus $\mathfrak{B}_{h-1} - \{th+1\}$.

Wir wollen nun schärfer zeigen

Satz 28. *Bei genügend großer Ordnung h gibt es unendlich viele Minimalbasen $\mathfrak{B}_h$ 7. Art der Ordnung h für $\mathfrak{Z}$ (genauer sogar eine Klasse von der Mächtigkeit des Kontinuums), die nicht in einer Minimalbasis $\mathfrak{B}_{h-1}$ 7. Art der Ordnung $h-1$ für $\mathfrak{Z}$ enthalten sind.*

Beweis. Wir benutzen die Klasse der Minimalbasen 7. Art der Ordnung h, die im Beweis zu Satz 17 konstruiert wurde. Sei $\mathfrak{B}_h$ eine Minimalbasis aus dieser Klasse. Die Zahlen $z \in \mathfrak{Z}$, zu deren Darstellung man h Summanden aus $\mathfrak{B}_h$ benötigt, gehören den Restklassen kongruent 0, $2h-2$ und $2h-1 \pmod{2h}$ an. Um $\mathfrak{B}_h$ zu einer Minimalbasis $\mathfrak{B}_{h-1}$ 7. Art der Ordnung $h-1$ zu ergänzen, muß man also zu $\mathfrak{B}_h$ Elemente hinzufügen, die nicht allein den Restklassen kongruent 0 und $2 \pmod{2h}$ angehören. Wenn aber $\mathfrak{B}_{h-1}$ ein Element $a \not\equiv 0, 1, 2 \pmod{2h}$ enthält, dann ist mit einem geeigneten Element $th+1$ bei genügend großer Ordnung h auch $\mathfrak{B}_{h-1} - \{th+1\}$ noch Basis der Ordnung $h-1$. Man braucht ja z. B. nur zu erreichen, daß jede Restklasse mod $2h$ durch eine Summe von $h-1$ Summanden aus $\mathfrak{B}_h \cup \{a\}$, unter denen sich zwei Summanden $x \equiv 1 \pmod{2h}$ befinden, darstellbar ist.

In diesem Zusammenhang beweisen wir

Satz 29. *Sei $\mathfrak{B}_h$ eine Minimalbasis 7. Art der Ordnung h für $\mathfrak{M}$, $h = h_1 h_2$, $h_1 < h_2 - 1$. Jedes positive Element $b \in \mathfrak{B}_h$ werde zur Darstellung (mindestens) einer Zahl $x(b) \in \mathfrak{M}$ benötigt, in der höchstens h_1 positive Summanden auftreten können; es hat also $x(b)$ die Darstellung*

$$x(b) = b + b^{(2)} + b^{(3)} + \cdots + b^{(s)} \qquad (s \leqq h_1;\ 0 < b^{(\sigma)} \in \mathfrak{B}_h).$$

Dann gibt es eine Minimalbasis $\mathfrak{B}_{h_1}$ 7. Art der Ordnung h_1 für $\mathfrak{M}$ so, daß $\mathfrak{B}_h \leqq \mathfrak{B}_{h_1}$ ist.

Beweis. Die Menge der Summen $\sum_{\varkappa=1}^{t} b^{(\varkappa)}$, wo $0 < b^{(\varkappa)} \in \mathfrak{B}_h$ ist und t alle Zahlen $h_1 < t \leqq h_2$ durchläuft, bezeichnen wir mit $\mathfrak{A}$. Wir behaupten nun, daß die Zahlenmenge

$\mathfrak{B}_{h_1}^* = \mathfrak{B}_h \cup \mathfrak{A}$ eine Basis der Ordnung h_1 für $\mathfrak{M}$ ist. Das erkennt man aus der Tatsache, daß die Zahlenmenge $\{0, 1, h_1 + 1, h_1 + 2, \ldots, h_1 + (h_2 - h_1)\}$ Abschnittsbasis der Ordnung h_1 für $h_1 h_2$ ist; es gilt nämlich:

Alle Zahlen $0 \leqq z \leqq h_1$ sind darstellbar als $z = \sum_{\varkappa=1}^{z} 1$;

alle Zahlen $h_1 + 1 \leqq z \leqq 2h_1$ sind darstellbar als $z = (h_1 + 1) + \sum_{\varkappa=1}^{z-(h_1+1)} 1$;

$z = 2h_1 + 1$ ist darstellbar als $z = (h_1 + 2) + \sum_{\varkappa=1}^{h_1-1} 1$;

alle Zahlen $qh_1 + q \leqq z \leqq (q + 1) h_1$ $(1 \leqq q \leqq h_1)$ sind darstellbar als

$$z = \sum_{\varkappa=1}^{q} (h_1 + 1) + \sum_{\varkappa=1}^{z-q(h_1+1)} 1;$$

alle Zahlen $(q + 1) h_1 + 1 \leqq z \leqq (q + 1) h_1 + q$ sind darstellbar als

$$z = \sum_{\varkappa=1}^{z-(q+1)h_1} (h_1 + 2) + \sum_{\varkappa=1}^{(q+1)h_1+q-z} (h_1 + 1) + \sum_{\varkappa=1}^{h_1-q} 1.$$

In dieser Weise kommt man bis $z = h_1(h_1 + 2) = \sum_{\varkappa=1}^{h_1} (h_1 + 2)$.

Von hier aus kann man nun leicht, indem man Summanden $h_1 + 2$ durch Elemente größer als $h_1 + 2$ ersetzt, alle Zahlen $z \leqq h_1 h_2$ darstellen; z. B. ist

$$z = h_1(h_1 + 2) + 2 = \sum_{\varkappa=1}^{2} (h_1 + 3) + \sum_{\varkappa=1}^{h_1-2} (h_1 + 2).$$

Alle Summen $\sum_{\varkappa=1}^{T} b^{(\varkappa)}$ $(1 \leqq T \leqq h)$ mit Summanden $b^{(\varkappa)} > 0$ sind also aufspaltbar in höchstens h_1 Summen von entweder einem positiven Summanden oder Summen der Form, wie sie in $\mathfrak{A}$ enthalten sind. Damit ist gezeigt, daß $\mathfrak{B}_{h_1}^*$ Basis der Ordnung h_1 ist.

Zur Darstellung der Zahl $x(b)$ mit h_1 Summanden aus $\mathfrak{B}_{h_1}^*$ wird b benötigt, denn angenommen, $x(b)$ wäre mit h_1 Summanden ohne b darstellbar:

$$x(b) = b^{(\nu_1)} + b^{(\nu_2)} + \cdots + a^{(i_1)} + a^{(i_2)} + \cdots$$

($a^{(i_k)} \in \mathfrak{A}$; ein Summand $a^{(i)}$ muß natürlich darunter sein); dann wäre $x(b)$ mit N Summanden aus $\mathfrak{B}_h$, wobei $h_1 < N \leqq h_1 h_2$ ist, darstellbar, was einen Widerspruch zur Voraussetzung bedeutet.

Nun sondern wir in bekannter Weise eine in $\mathfrak{B}_{h_1}^*$ enthaltene Minimalbasis $\mathfrak{B}_{h_1}$ 7. Art der Ordnung h_1 für $\mathfrak{M}$ aus; diese enthält dann alle Elemente $b \in \mathfrak{B}_h$.

19. Die umgekehrte Frage, eine Minimalbasis 7. Art der Ordnung $h (h \geqq 2)$ für eine Menge $\mathfrak{M}$ anzugeben, die eine vorgegebene natürliche Zahl $a > 1$ nicht enthält, ist sofort entschieden. Dazu braucht man ja nur eine Minimalbasis 7. Art der Ordnung h für $\mathfrak{M}$, die nach dem Existenzsatz in $\mathfrak{Z} - \{a\} = \{0, 1, 2, \ldots, a - 1, a + 1, \ldots\}$ enthalten ist, zu nehmen.

Für die weiteren Untersuchungen wollen wir also die Fragestellung etwas abändern. Gegeben sei eine Basis $\mathfrak{B}_h$ der Ordnung h. In $\mathfrak{B}_h$ sind Minimalbasen $\mathfrak{B}_{h'}$ 7. Art der Ordnung $h' \geqq h$ enthalten. Gibt es dann Minimalbasen $\mathfrak{B}_{h'}$, die in $\mathfrak{B}_h$ enthalten sind und ein vorgegebenes Element $b > 1$ aus $\mathfrak{B}_h$ nicht enthalten? Ein Beispiel für $\mathfrak{M} = \mathfrak{Z}$ soll zunächst die Sachlage beleuchten. Als Basis $\mathfrak{B}_h$ nehmen wir eine Basis $\mathfrak{B}$ der Ordnung h, für die $\mathfrak{B} \cap [0, 3h - 1] = \{0, 1, 3, 3h - 1\}$ gilt. Dann ist $\mathfrak{B}_h - \{3\}$ keine Basis der Ordnung $3h - 3$, enthält also auch keine Minimalbasis 7. Art der Ordnung h', wenn $h' \leqq 3h - 3$ ist.

Allzuviel kann man demnach nicht erwarten. Es gilt aber

Satz 30. *In jeder Basis $\mathfrak{B}_h$ der Ordnung $h (h \geqq 2)$ für $\mathfrak{Z}$ ist eine Minimalbasis $\mathfrak{B}_{h^2}$ 7. Art der Ordnung h^2 für $\mathfrak{Z}$ enthalten, die ein vorgegebenes Element $b > 1$ aus $\mathfrak{B}_h$ nicht enthält.*

Beweis. Es genügt offenbar zu zeigen, daß $\mathfrak{B}_h - \{b\} = \mathfrak{B}_h^*$ Basis der Ordnung h^2 ist. Für ein Element $b \in \mathfrak{B}_h$ kann die Menge $\mathfrak{Z}_b$ (im Sinne von Nr. 14) überhaupt leer sein. In diesem Fall ist die Behauptung klar.

Wenn $\mathfrak{Z}_b$ nicht leer ist, benutzen wir die Sätze 20 bis 22 aus § 4. Wir betrachten die folgenden drei Fälle:

1) $b \geqq \max(h, 3)$. Alle Zahlen $z \in \mathfrak{Z}$ einer Kette

$$z_{k_0}, z_{k_0} + 1, \ldots, z_T \leqq z_{k_0} + (h-1)\,b - h,$$

die in $\mathfrak{Z}_b$ auftritt, sind dann mit h^2 Summanden aus $\mathfrak{B}_h^*$ darstellbar, weil

$$z_{k_0} + (h-1)\,b - h = (z_{k_0} - 1) + (h-1)(b-1)$$

ist.

2) $b < h$. Alle Zahlen $z \in \mathfrak{Z}$ einer Kette $z_{k_0}, z_{k_0} + 1, \ldots, z_T \leqq z_{k_0} + (h-1)\,b$, die in $\mathfrak{Z}_b$ auftritt, sind dann mit h^2 Summanden aus $\mathfrak{B}_h^*$ darstellbar, weil $z_{k_0} + (h-1)\,b = (z_{h_0} - 1) + 1 + (h-1)\,b$ ist und b als Summe von $h-1$ Summanden darstellbar ist.

3) $b = h = 2$. Für eine Zahl $z_k \in \mathfrak{Z}_b$, für die nur die Darstellung $z_k = (z_k - 2) + 2$ galt, ist jetzt die Darstellung $z_k = (z_k - 2) + 1 + 1$ möglich.

Das oben angeführte Beispiel für den Fall $h = 2$ zeigt, daß Satz 30 allgemein nicht zu verbessern ist.

20. Wenn $\mathfrak{B}$ Basis der Ordnung th für $\mathfrak{M}$ ist, dann ist $\mathfrak{B}^* = t\mathfrak{B}$ Basis der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ $(t \geqq 1)$. Jede Zahl $x_n \in \mathfrak{M}$ ist nämlich darstellbar als

$$x_n = \sum_{\varkappa=1}^{th} b^{(\varkappa)}, \quad b^{(\varkappa)} \in \mathfrak{B},$$

und hieraus erhält man

$$x_n = \sum_{\varkappa=1}^{h} (b^{(\varkappa)} + b^{(\varkappa+h)} + \cdots + b^{(t-1)h+\varkappa}) \text{ mit } b^{(\varkappa)} + b^{(\varkappa+h)} + \cdots + b^{((t-1)h+\varkappa)} \in \mathfrak{B}^*.$$

Wir wollen zeigen

Satz 31. *Sei $\mathfrak{B}$ Basis der Ordnung th $(t \geqq 3)$ für $\mathfrak{Z}$. Dann ist $t\mathfrak{B}$ keine Minimalbasis 7. Art der Ordnung h für $\mathfrak{Z}$.*

Beweis. I. $\mathfrak{B}$ enthält ein Element b mit der Eigenschaft $b = \sum_{\varkappa=1}^{th} b^{(\varkappa)}$, $b^{(\varkappa)} \in \mathfrak{B}$, $b^{(\varkappa)} \neq b$. (Dann ist notwendig $b > 1$.) Folglich ist auch $b \in t\mathfrak{B}$. Wir wollen zeigen, daß auch $t\mathfrak{B} - \{b\}$ Basis der Ordnung h ist.

Sei $z(b)$ eine Zahl, zu deren Darstellung mit th Summanden aus $\mathfrak{B}$ das Element b benötigt wird. (Wenn b für keine Zahl zur Darstellung benötigt wird, ist die Behauptung klar.) Wir unterscheiden die Fälle

1) $z(b) = \sum_{\varkappa=1}^{th} b^{(\varkappa)}$, $b^{(\varkappa)} \in \mathfrak{B}$, mindestens ein positives $b^{(\varkappa)}$ (etwa $b^{(1)}$) sei von b verschieden. Dann ist $z(b)$ mit h Summanden aus $t\mathfrak{B}$ ohne b darstellbar, weil $b + b^{(1)} + b^{(\alpha_2)} + \cdots + b^{(\alpha_t)} \in t\mathfrak{B}$ ist.

2) $z(b) = \sum_{\varkappa=1}^{th} b^{(\varkappa)}$, $b^{(\varkappa)} = 0$ oder b.

a) Ist die Anzahl der Summanden b inkongruent $1 \pmod t$, dann sind wir fertig.

b) Ist die Anzahl der Summanden b kongruent $1 \pmod t$, dann muß die Anzahl der Summanden b wegen der Voraussetzung über b größer als 1 sein. Unter Benutzung der Elemente $(t-1)\,b$ und $2b$ aus $t\mathfrak{B}$ erhält man dann eine Darstellung von $z(b)$ ohne b.

II. $\mathfrak{B}$ enthält kein solches Element b. Daher ist $\mathfrak{B} = \{0; x \equiv 1 \pmod{th}\}$. In diesem Fall ist die Behauptung ebenfalls ohne Schwierigkeit einzusehen, denn dann enthielte $t\mathfrak{B}$ außer den Elementen von $\mathfrak{B}$ die Restklassen $x \equiv 2, 3, \ldots, t \pmod{th}$, aber $\tilde{\mathfrak{B}} = \{0, 2, \ldots, t-1;\ x \equiv 1 \pmod{th},\ x \equiv t \pmod{th}\}$ ist als echte Untermenge von $t\mathfrak{B}$ auch noch Basis der Ordnung h.

Vorausgreifend auf die Minimalbasen 8. Art wollen wir zeigen

Satz 32. *Sei $\mathfrak{B}$ Minimalbasis 8. Art der Ordnung th für $\mathfrak{M}$. Dann ist $\mathfrak{B}^* = t\mathfrak{B}$ Minimalbasis 8. Art der Ordnung h für $\mathfrak{M}$.*

Beweis. Man erhält (Anzahl der Kombinationen)

$$B^*(n) \leqq \binom{B(n)+t}{t} = O(B(n)^t)$$

und wegen $B(n) = O\left(\sqrt[th]{M(n)}\right)$

$$B^*(n) = O\left(\sqrt[h]{M(n)}\right).$$

§ 6. Minimalbasen 7. Art für $\mathfrak{Z}$ mit positiver Dichte.

21. In diesem Paragraphen werden nur Basen für $\mathfrak{Z}$ betrachtet. — Wie wir in Satz 17 zeigten, hat die Klasse der Minimalbasen 7. Art der Ordnung h ($h \geqq 2$) für $\mathfrak{Z}$ mit positiver Dichte die Mächtigkeit des Kontinuums. Unter diesen sind besonders leicht zugänglich die periodischen Minimalbasen 7. Art. Dabei heißt eine Basis periodisch, wenn es eine ganze Zahl $m \geqq 1$ so gibt, daß für jedes $b \geqq s$ in $\mathfrak{B}$ (bei passendem s) stets auch $b + m$ zu $\mathfrak{B}$ gehört[6]). Die Zahl m soll in diesem Paragraphen immer die hier angegebene Bedeutung eines Moduls haben.

Zunächst wollen wir ein Beispiel dafür geben, daß eine Minimalbasis 7. Art mit positiver Dichte — nach einer Folgerung aus Satz 17 können ja nicht alle Minimalbasen 7. Art mit positiver Dichte periodisch sein — auch keine periodische Untermenge, also keine Restklasse zu enthalten braucht. Wir beschränken uns der Einfachheit halber auf die Ordnung $h = 2$ und schreiben das Beispiel in einem Schema auf, wie es in Nr. 13 eingeführt wurde (Fig. 8). Das Beispiel besteht also, wie das Schema andeutet, aus der Vereinigungsmenge von endlichen Stücken der Restklassen $x \equiv 0 \pmod 5$ und $x \equiv 2 \pmod 5$, die unperiodisch abwechseln.

Fig. 8.

22. Im folgenden wollen wir einige Eigenschaften der Minimalbasen 7. Art mit positiver Dichte beweisen.

Satz 33. *Es gibt unendlich viele periodische Minimalbasen 7. Art der Ordnung $h (h \geqq 2)$.*

Beweis. Sei $\mathfrak{A}_0$ eine Untermenge von $\{0, 1, 2, \ldots, t\}$ ($t = 1, 2, 3, \ldots$) derart, daß $\mathfrak{A}_0$ Abschnittsbasis der Ordnung $h - 1$ für $(h-1)t$ ist und keine echte Untermenge von $\mathfrak{A}_0$ diese Eigenschaft besitzt. Offenbar muß dann $\{0, 1, t\} \leqq \mathfrak{A}_0$ sein. Jede Basis $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_0 \cup \{x \equiv 0 \pmod{(h-1)t+1}\}$ ist nun Minimalbasis 7. Art der Ordnung h, was man an Hand eines Schemas mod $(h-1)t+1$, wie es in Nr. 13 eingeführt wurde, erkennt (Fig. 9).

[7]) *Volkmann* nennt die Mengen, die wir periodisch nennen, rational.

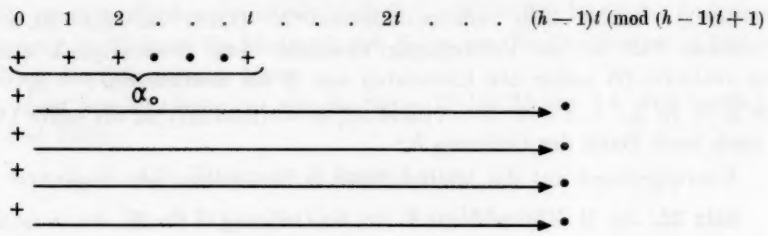


Fig. 9

Für den Rest dieses Paragraphen wollen wir folgende Bezeichnung verabreden: Wenn eine Zahlenmenge $\mathfrak{A}$ alle Zahlen aus den Restklassen

$$\begin{aligned} &x \equiv a_1 \pmod m, \\ &x \equiv a_2 \pmod m, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (k \leqq m,\ m \geqq 1) \\ &x \equiv a_k \pmod m \end{aligned}$$

oberhalb einer Schranke s enthält, dann wollen wir schreiben

$$\mathfrak{A}\{a_1, a_2, \ldots, a_k(m)\}.$$

Mit dieser Bezeichnung gilt

Satz 34. *Sei $\mathfrak{B}\{a(m)\}$ eine Minimalbasis 7. Art der Ordnung $h (h \geqq 2)$. Dann enthält $\mathfrak{B}\{a(m)\}$ von einer Stelle s_1 ab keine Elemente aus gewissen anderen Restklassen* mod m. *Das bedeutet, es gibt eine Restklasse c (mod m) so, daß*

$$\mathfrak{B}\{a(m)\} \frown \{x \equiv c \pmod m\}$$

endlich ist.

Beweis. Angenommen, $\mathfrak{B}\{a(m)\}$ enthielte oberhalb jeder Schranke s_1 noch Elemente aus allen Restklassen mod m. Sei $a_t^* \in \mathfrak{B}\{a(m)\}$, $a_t^* \equiv t \pmod m$, $t = 0, 1, \ldots, m-1$. Dann bildet die Zahlenmenge

$$\mathfrak{B}^* = \{a_0^*, a_1^*, \ldots, a_{m-1}^*\} \smile \{x \equiv a \pmod m;\ x \geqq s\}$$

eine asymptotische Basis der Ordnung h, also wäre eine echte Untermenge von $\mathfrak{B}\{a(m)\}$ ebenfalls noch Basis der Ordnung h.

Satz 35. *Sei $\mathfrak{B}\{a(m)\}$ eine Minimalbasis 7. Art der Ordnung $h (h \geqq 2)$, aber nicht periodisch. Dann enthält $\mathfrak{B}\{a(m)\}$ aus mindestens einer Restklasse* mod m *kein Element. Das bedeutet, es gibt eine Restklasse c (mod m) so, daß*

$$\mathfrak{B}\{a(m)\} \frown \{x \equiv c \pmod m\} = \mathfrak{O} \qquad (\mathfrak{O} = \textit{leere Menge})$$

ist.

Beweis. Angenommen, es gäbe in jeder Restklasse $x \equiv t \pmod m$, $t = 0, 1, \ldots, m-1$ ein Element $a_t^* \equiv t \pmod m$, das in $\mathfrak{B}\{a(m)\}$ liegt. Dann wäre die Zahlenmenge

$$\mathfrak{B}^* = \{a_0^*, a_1^*, \ldots, a_{m-1}^*\} \smile \{x \equiv a \pmod m;\ x \geqq s\}$$

eine asymptotische Basis der Ordnung h, und daher enthielte $\mathfrak{B}\{a(m)\}$ eine periodische Basis der Ordnung h als echte Untermenge, was einen Widerspruch bedeutet.

Satz 36. *Sei $\mathfrak{B}\{a_1, a_2, \ldots, a_k(m)\}$ eine periodische Minimalbasis 7. Art der Ordnung $h (h \geqq 2)$, und für jede Restklasse $c \not\equiv a_i \pmod m$, $i = 1, 2, \ldots, k$ sei der Durchschnitt mit $\mathfrak{B}\{a_1, a_2, \ldots, a_k(m)\}$ endlich. Dann enthält $\mathfrak{B}\{a_1, \ldots, a_k(m)\}$ Elemente $c_1, c_2 \ldots, c_r (r \geqq 1)$ mit der Eigenschaft*

$$c_\varrho \not\equiv a_i \pmod m,\ i = 1, 2, \ldots, k;\ \varrho = 1, 2, \ldots, r.$$

Beweis. Angenommen, $\mathfrak{B}\{a_1,\ldots,a_k(m)\}$ besäße nur Elemente, die den Restklassen $a_1,\ldots,a_k(\mathrm{mod}\, m)$ angehören; sei b ein genügend großes Element aus $\mathfrak{B}\{a_1,\ldots,a_k(m)\}$. Wir wollen zeigen, daß $\mathfrak{B}\{a_1,\ldots,a_k(m)\}-\{b\}$ dann auch noch Basis der Ordnung h wäre. Wenn nämlich eine Zahl z die Darstellung $z=lb+\sum\limits_{\varkappa=l+1}^{h} b^{(\varkappa)}\,(b^{(\varkappa)}\neq b;\ 1\leqq l\leqq h-1)$ hat, dann ist auch z mit passendem t_0 darstellbar als $z=l(b-t_0m)+(b^{(l+1)}+lt_0m)+\sum\limits_{\varkappa=l+2}^{h} b^{(\varkappa)}$; bzw. wenn $z=hb$ ist, dann haben wir auch die Darstellung $z=(h-1)\,(b-t_0m)+\big(b+(h-1)t_0m\big)$.

Die Elemente c_ϱ, deren Existenz in Satz 36 nachgewiesen wurde, wollen wir *Anfangselemente* der Basis $\mathfrak{B}\{a_1,\ldots,a_k(m)\}$ nennen.

Satz 37. *Sei $\mathfrak{B}\{a_1,\ldots,a_k(m)\}$ eine periodische Minimalbasis 7. Art der Ordnung $h(h\geqq 2)$ und erfülle die Voraussetzung von Satz 36. Dann gibt es zu jeder Restklasse $x\equiv a_i(\mathrm{mod}\, m)$, $1\leqq i\leqq k$, eine Restklasse* mod m, *deren Vertreter von einer Stelle ab nur mit Hilfe von Anfangselementen c_ϱ und genau einem Summanden aus der Restklasse $x\equiv a_i$* (mod m) *darstellbar sind.*

Beweis. Sei b ein genügend großes Element aus $\mathfrak{B}\{a_1,\ldots,a_k(m)\}$. Das Element b wird benötigt zur Darstellung einer Zahl $z(b)$, wo außer genau einem Summanden b nur Anfangselemente c_ϱ benutzt werden können, denn andernfalls wäre $z(b)$ auch ohne Benutzung von b darstellbar.

Die Zahl $z(b)+m$ ist dann nur mit genau einem Summanden $b+m$ und Anfangselementen c_ϱ darstellbar, denn andernfalls wäre $z(b)$ auch ohne Benutzung von b darstellbar. Also sind die Vertreter der Restklasse $z\equiv z(b)$ (mod m) von einer Stelle ab nur mit genau einem Summanden aus der Restklasse $x\equiv b$ (mod m) und Anfangselementen c_ϱ darstellbar.

Satz 38. *Sei β die Dichte einer Minimalbasis 7. Art der Ordnung $h(h\geqq 1)$. Dann gilt $0\leqq\beta\leqq\frac{1}{h}$.*

Beweis. Angenommen, die Minimalbasis $\mathfrak{B}_0$ 7. Art der Ordnung h hätte eine Dichte $\beta_0=\underset{n=1,2,\ldots}{\mathrm{fin}}\frac{B_0(n)}{n}=\frac{1}{h}+\varepsilon$, $\varepsilon>0$. Dann zeigen wir, daß für $b\in\mathfrak{B}_0$, $b>\frac{1}{\varepsilon}$, auch $\mathfrak{B}^*=\mathfrak{B}_0-\{b\}$ noch Basis der Ordnung h ist. Es gilt ja

$$\underset{n=1,2,\ldots}{\mathrm{fin}}\frac{B^*(n)}{n}=\min\left(\underset{n=1,2,\ldots,b-1}{\mathrm{fin}}\frac{B^*(n)}{n},\ \underset{n=b,b+1,\ldots}{\mathrm{fin}}\frac{B^*(n)}{n}\right)$$
$$=\min\left(\underset{n=1,\ldots,b-1}{\mathrm{fin}}\frac{B_0(n)}{n},\ \underset{n=b,b+1,\ldots}{\mathrm{fin}}\frac{B_0(n)-1}{n}\right)>\frac{1}{h},$$

weil nach Annahme und der Voraussetzung über b

$$\underset{n=1,\ldots,b-1}{\mathrm{fin}}\frac{B_0(n)}{n}\geqq\frac{1}{h}+\varepsilon\quad\text{und}\quad\underset{n=b,b+1,\ldots}{\mathrm{fin}}\left(\frac{B_0(n)}{n}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{h}+\varepsilon'\qquad(\varepsilon'>0)$$

ist.

Durch Anwendung des Satzes von Mann in der Erweiterung von Dyson [2] erhält man nun sofort die Basiseigenschaft von $\mathfrak{B}^*$.

Satz 39. *Jede periodische Minimalbasis 7. Art der Ordnung h ist Basis genau h-ter Ordnung.*

Beweis. Angenommen, die periodische Minimalbasis $\mathfrak{B}$ 7. Art der Ordnung h wäre auch Basis der Ordnung $h-1$, d. h. jedes $z\in\mathfrak{Z}$ ist darstellbar als $z=\sum\limits_{\varkappa=1}^{h-1}b^{(\varkappa)}$, $b^{(\varkappa)}\in\mathfrak{B}$.

Wenn nun $b \in \mathfrak{B}$ ist, dann besitzt jedes $z \geqq b$ eine Darstellung mit h Summanden aus $\mathfrak{B}$, unter denen b vorkommt. Das bedeutet, daß von einer Stelle ab alle z Darstellungen besäßen, in denen zwei Summanden aus den Restklassen $a_1, \ldots, a_k$ mod m im Sinne von Satz 37 aufträten, was einen Widerspruch bedeutet.

Satz 40. *In jeder periodischen Basis $\mathfrak{B}$ der Ordnung $h (h \geqq 1)$ wird jedes hinreichend große Element b zur Darstellung von nur endlich vielen Zahlen benötigt.*

Beweis. Wenn m der Modul der Periode ist, dann ist auch $b + tm \in \mathfrak{B} (t = 1, 2, \ldots)$. Wenn b zur Darstellung der Zahl $z(b)$ benötigt wird, dann ist $z(b) + sm (s \geqq 1)$ ohne Benutzung von b darstellbar.

§ 7. Minimalbasen achter Art.

23. Wir betrachten noch kurz die entsprechenden Fragen, wie sie für Minimalbasen 7. Art behandelt wurden, für Minimalbasen 8. Art. Die Beweise sind hier im allgemeinen einfacher, manche Fragestellungen werden überhaupt trivial.

Wie in Nr. 3 erwähnt, konstruierten Stöhr, Raikov und Chatrovsky Minimalbasen 8. Art für $\mathfrak{M} = \mathfrak{Z}$. Jedoch existieren nicht für jede Menge $\mathfrak{M}$ Minimalbasen 8. Art. Zum Beispiel besitzt eine Menge, die die Gestalt (2) hat, keine Minimalbasis 8. Art der Ordnung h, weil für jede Basis $\mathfrak{B}$ der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ die Ungleichung $B(n) \geqq M(n)$ gilt.

Wir zeigen

Satz 41. *Wenn eine (unendliche) Menge $\mathfrak{M}$ Minimalbasen 8. Art der Ordnung $h (h \geqq 2)$ besitzt, dann hat die Klasse K_8^h der Minimalbasen 8. Art der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ die Mächtigkeit des Kontinuums.*

Beweis. Sei $\mathfrak{B}$ Minimalbasis 8. Art der Ordnung h für $\mathfrak{M}$, d. h. es gilt $B(n) = O\left(\sqrt[h]{M(n)}\right)$. Dann wählen wir aus der Komplementärmenge $\overline{\mathfrak{B}} = \mathfrak{Z} - \mathfrak{B}$ von $\mathfrak{B}$ zur Menge $\mathfrak{Z}$ der nichtnegativen ganzen Zahlen eine unendliche Menge $\mathfrak{B}^* = \{z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots), z_k < z_{k+1}$, derart aus, daß $B^*(n) = O\left(M(n)^\alpha\right), \alpha \leqq \frac{1}{h}$, ist. Eine solche Auswahl ist möglich: Sei $\mathfrak{C} = \{c_1, c_2, \ldots, c_k, \ldots\}, c_k < c_{k+1}$, die Menge der Zahlen c_k mit der Eigenschaft

$$c_k - 1 \in \mathfrak{B}, \; c_k \in \mathfrak{B}.$$

Nun setzen wir für die Konstruktion von $\mathfrak{B}^*$

$$z_1 = c_1 = \mathfrak{B}_1^*.$$

Weiterhin setzen wir, wenn $\mathfrak{B}_{k-1}^*$ schon definiert ist,

$$\mathfrak{B}_k^* = \begin{cases} \mathfrak{B}_{k-1}^* \cup \{c_k\} & \text{im Fall } B_{k-1}^*(c_k) + 1 < A M(c_k)^\alpha \; (0 < A = \text{const.}), \\ \mathfrak{B}_{k-1}^* & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für die Vereinigungsmenge $\mathfrak{B}^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathfrak{B}_k^*$ gilt dann offenbar $B^*(n) = O\left(M(n)^\alpha\right)$. Es sei $\mathfrak{B}^{\mathfrak{K}} = \mathfrak{B} \cup \{z_{k_1}, z_{k_2}, \ldots\}$, wobei $k_1, k_2, \ldots$ alle endlichen und unendlichen Mengen $\mathfrak{K}$ natürlicher Zahlen mit $k_1 < k_2 < \cdots$ durchläuft. Dann ist $\mathfrak{B}^{\mathfrak{K}}$ offenbar auch Minimalbasis 8. Art der Ordnung h für $\mathfrak{M}$, denn es gilt

$$B^{\mathfrak{K}}(n) \leqq B(n) + B^*(n) = O\left(M(n)^{\frac{1}{h}}\right) + O\left(M(n)^\alpha\right) = O\left(M(n)^{\frac{1}{h}}\right).$$

Ferner ist die Klasse der Mengen $\mathfrak{K}$ von der Mächtigkeit des Kontinuums, womit die Behauptung bewiesen ist.

Zusatz. Jedes $\mathfrak{B}^{\mathfrak{K}}$ ist Basis genau h-ter Ordnung für $\mathfrak{M}$.

Ist $\mathfrak{B}$ Basis der Ordnung $h-1$ für $\mathfrak{M}$, dann muß für jede natürliche Zahl n gelten

$$\binom{B(n)+h-1}{h-1} \geqq M(n)+1.$$

Hieraus folgt

$$(B(n)+h-1)^{h-1} \geqq (M(n)+1)(h-1)!,$$

und daher wäre

$$B(n) \neq O\left(\sqrt[h]{M(n)}\right).$$

24. Die Minimalbasisdefinition 8 hat ihre eigentliche Bedeutung im Fall $\mathfrak{M} = \mathfrak{Z}$. Daher wollen wir uns für den Rest dieses Paragraphen allein auf diesen Spezialfall beschränken.

Die Frage, ob es zu jeder endlichen Menge $\mathfrak{A}$ nichtnegativer ganzer Zahlen eine Minimalbasis 8. Art der Ordnung h (für $\mathfrak{Z}$) gibt, die $\mathfrak{A}$ enthält, erledigt sich hier als trivial. Allgemein kann man sagen, daß es zu jeder Menge $\mathfrak{A}$ nichtnegativer ganzer Zahlen mit $A(n) = O\left(\sqrt[h]{n}\right)$ eine Minimalbasis 8. Art der Ordnung h (für $\mathfrak{Z}$) gibt, die $\mathfrak{A}$ enthält. Denn ist $\mathfrak{B}$ eine Minimalbasis 8. Art der Ordnung h, dann gilt für $\mathfrak{V} = \mathfrak{B} \cup \mathfrak{A}$ die Abschätzung

$$V(n) = O\left(\sqrt[h]{n}\right).$$

Im Gegensatz zu den Minimalbasen 7. Art gilt hier aber

Satz 42. *Jede Minimalbasis $\mathfrak{B}_h$ 8. Art der Ordnung h (für $\mathfrak{Z}$) ist in einer Minimalbasis $\mathfrak{B}_{h-1}$ 8. Art der Ordnung $h-1$ (für $\mathfrak{Z}$) enthalten.*

Beweis. Sei $\mathfrak{B}^*_{h-1}$ eine beliebige Minimalbasis 8. Art der Ordnung $h-1$. Dann ist die Zahlenmenge $\mathfrak{B}_{h-1} = \mathfrak{B}^*_{h-1} \cup \mathfrak{B}_h$ Minimalbasis 8. Art der Ordnung $h-1$ und enthält $\mathfrak{B}_h$.

25. Die Klassen K_7^h bzw. K_8^h der Minimalbasen 7. bzw. 8. Art der Ordnung h haben je die Mächtigkeit des Kontinuums (Satz 12 bzw. 41). Ostmann [3] schlägt daher vor, als Minimalbasen nur diejenigen anzusehen, die dem Durchschnitt $K_7^h \cap K_8^h$ angehören, kommt also zu der

Definition 9. *Eine Basis $\mathfrak{B}$ der Ordnung h für $\mathfrak{Z}$ heißt* Minimalbasis 9. Art, *wenn keine echte Teilmenge von $\mathfrak{B}$ eine Basis der Ordnung h für $\mathfrak{Z}$ ist und wenn für $\mathfrak{B}$ die Abschätzung $B(n) = O(n^{\frac{1}{h}})$ gilt.*

Doch auch mit dieser Definition wird die Mächtigkeit der Klasse der Minimalbasen nicht verringert. Es gilt nämlich

Satz 43. *Die Klasse K_9^h der Minimalbasen 9. Art der Ordnung $h (h \geqq 2)$ hat ebenfalls die Mächtigkeit des Kontinuums.*

Beweis. Wir knüpfen an die Konstruktionsmethode von Stöhr [7] für Basen $\mathfrak{B}$ der Ordnung h mit $B(n) = O\left(\sqrt[h]{n}\right)$ an.

Sei $\mathfrak{A}_\mu$ die Menge der Zahlen, die im Ziffernsystem mit der Basis 2^h die Ziffern 0 oder $2^{\mu-1}$ haben ($\mu = 1, 2, \ldots, h$). Dann ist die Zahlenmenge

$$\mathfrak{B} = \bigcup_{\mu=1}^{h} \mathfrak{A}_\mu \tag{17}$$

Basis der Ordnung h. Denn jede nichtnegative ganze Zahl z hat im Ziffernsystem mit der Basis 2^h eine (eindeutige) Darstellung

$$z = \sum_{\nu=0}^{N} g_\nu 2^{h\nu} \text{ mit } 0 \leqq g_\nu \leqq 2^h - 1 \tag{18}$$

und jedes g_ν ist darstellbar als

$$g_\nu = \sum_{\mu=1}^{h} c_\mu^{(\nu)}, \tag{19}$$

wobei $c_\mu^{(\nu)} = \varepsilon_{\mu\nu} 2^{\mu-1}$ ($\varepsilon_{\mu\nu} = 0$ oder 1) ist (Darstellung im Ziffernsystem mit der Basis 2). Damit erhalten wir

$$z = \sum_{\nu=0}^{N} \sum_{\mu=1}^{h} c_\mu^{(\nu)} 2^{h\nu} = \sum_{\mu=1}^{h} \sum_{\nu=0}^{N} c_\mu^{(\nu)} 2^{h\nu}, \tag{20}$$

wobei die innere über ν erstreckte Summe für jedes feste $\mu (1 \leqq \mu \leqq h)$ Element aus $\mathfrak{B}$ ist. Außerdem gilt, wie Stöhr gezeigt hat, $B(n) = O\left(\sqrt[h]{n}\right)$.

Sei $\mathfrak{K} = \{k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots\}$ mit $k_i < k_{i+1}$ eine (endliche oder unendliche) Menge natürlicher Zahlen. Nun ersetzen wir in den Elementen der Menge $\mathfrak{A}_1$ die Ziffern 1, die zu den Potenzen $2^{hk_1}, 2^{hk_2}, \ldots, 2^{hk_i}, \ldots$ gehören, durch die Ziffer 2; und in den Elementen der Menge $\mathfrak{A}_2$ ersetzen wir die Ziffern 2, die zu den Potenzen $2^{hk_1}, 2^{hk_2}, \ldots, 2^{hk_i}$ gehören, durch die Ziffer 1. Hierdurch erhalten wir zwei neue Mengen $\tilde{\mathfrak{A}}_1$ und $\tilde{\mathfrak{A}}_2$. Für $\mu \geqq 3$ setzen wir $\tilde{\mathfrak{A}}_\mu = \mathfrak{A}_\mu$. Die Menge

$$\tilde{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{K}} = \bigcup_{\mu=1}^{h} \tilde{\mathfrak{A}}_\mu$$

ist dann auch Basis der Ordnung h, was man an Hand der Darstellung (20) leicht erkennt, und es gilt ebenfalls $\tilde{B}^{\mathfrak{K}}(n) = O\left(\sqrt[h]{n}\right)$. Denn ist $2^{hs} \leqq n < 2^{h(s+1)}$, so können wir abschätzen

$$\frac{\tilde{B}^{\mathfrak{K}}(n)}{\sqrt[h]{n}} \leqq \frac{\tilde{B}^{\mathfrak{K}}(2^{h(s+1)}-1)}{\sqrt[h]{2^{hs}}} \leqq \frac{\sum_{\mu=1}^{h} \tilde{A}_\mu(2^{h(s+1)}-1)}{2^s} \leqq \frac{h 2^{s+1}}{2^s},$$

weil $\tilde{\mathfrak{A}}_\mu$ unterhalb $2^{h(s+1)}$ die Elemente

$$\tilde{c}_\mu^{(0)} + \tilde{c}_\mu^{(1)} 2^h + \cdots + \tilde{c}_\mu^{(s)} 2^{hs} \text{ mit } \tilde{c}_\mu^{(\nu)} = \begin{cases} 0 \text{ oder } 2^{\mu_1-1} & \text{für } \nu \in \mathfrak{K}, \\ 0 \text{ oder } 2^{\mu-1} & \text{für } \nu \notin \mathfrak{K}, \\ \tilde{c}_\mu^{(0)} = 0 \text{ oder } 2^{\mu-1} \end{cases} \text{ mit } \begin{cases} \mu_1 = 2 \text{ für } \mu = 1, \\ \mu_1 = 1 \text{ für } \mu = 2, \\ \mu_1 = \mu \text{ für } \mu \geqq 3 \end{cases}$$

enthält. Daher gilt $\tilde{A}_\mu(2^{h(s+1)}-1) \leqq 2^{s+1}$. Also ist $\tilde{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{K}}$ Minimalbasis 8. Art der Ordnung h.

Die Basis $\tilde{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{K}}$ enthält ein Element

$$b^{\mathfrak{K}} = \sum_{\nu=0}^{N_0} \tilde{c}_\mu^{(\nu)} 2^{h\nu} \text{ mit } \tilde{c}_\mu^{(\nu)} = \begin{cases} 2^{\mu_1-1}, & \text{falls } \nu \in \mathfrak{K}, \\ 2^{\mu-1}, & \text{falls } \nu \notin \mathfrak{K}, \\ \tilde{c}_\mu^{(0)} = 2^{\mu-1}. \end{cases} \text{ mit } \begin{cases} \mu_1 = 2 \text{ für } \mu = 1, \\ \mu_1 = 1 \text{ für } \mu = 2, \\ \mu_1 = \mu \text{ für } \mu \geqq 3. \end{cases} \tag{21}$$

Wir wollen zeigen, daß $b^{\mathfrak{K}}$ zur Darstellung der Zahl

$$z_{N_0} = (2^h - 1) \sum_{\nu=0}^{N_0} 2^{h\nu} = \sum_{\nu=0}^{N_0} \sum_{\mu=1}^{h} 2^{\mu-1} 2^{h\nu} = \sum_{\mu=1}^{h} 2^{\mu-1} \sum_{\nu=0}^{N_0} 2^{h\nu}$$

benötigt wird.

Zunächst zeigen wir, daß die Zahl $z_0 = 2^h - 1$ durch h Summanden aus $\tilde{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{K}}$ die eindeutige Darstellung

$$2^h - 1 = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{h-1}$$

hat. Für den Fall $h = 1$ ist die Behauptung trivial. Wir nehmen an, sie sei schon für $h - 1 (h > 1)$ bewiesen; wäre die Behauptung für h falsch, dann hätte $2^h - 1$ noch eine Darstellung

$$2^h - 1 = 2^{x_1} + 2^{x_2} + \cdots + 2^{x_t}, \; t \leqq h,$$

und in dieser müßten die Exponenten $\alpha_i = 0$ in ungerader Anzahl auftreten. Daher könnte man schreiben

$$2^h - 1 = 1 + (1 + 1) + (1 + 1) + \cdots + 2^{\beta_1} + 2^{\beta_2} + \cdots + 2^{\beta_\tau}, \ \beta_i > 0, \ \tau < h,$$

woraus folgt

$$2^{h-1} - 1 = 1 + 1 + \cdots + 2^{\beta_1 - 1} + 2^{\beta_2 - 1} + \cdots + 2^{\beta_\tau - 1},$$

was einen Widerspruch bedeutet.

Für die Zahl z_{N_0} gilt nun die Kongruenz $z_{N_0} \equiv 2^h - 1 \pmod{2^h}$. Daher sind für z_{N_0} alle Zahlen $\varepsilon_{\mu 0} = 1$, d. h. alle Zahlen $\tilde{c}_\mu^{(0)} = 2^{\mu - 1}$ (im Sinn der Darstellungen (19) und (20)). Daraus folgt, daß die Darstellung für z_{N_0} eindeutig ist und daß $b^{\mathfrak{K}}$ zu dieser Darstellung benötigt wird.

Aus der Basis $\tilde{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{K}}$ wählen wir nun in bekannter Weise eine Minimalbasis $\mathfrak{B}^{\mathfrak{K}}$ 7. Art der Ordnung h aus; nach den obigen Überlegungen muß $\mathfrak{B}^{\mathfrak{K}}$ das Element $b^{\mathfrak{K}}$ enthalten. Dann unterscheiden sich je zwei auf diese Weise konstruierte Minimalbasen $\mathfrak{B}^{\mathfrak{K}_1}$ und $\mathfrak{B}^{\mathfrak{K}_2}$ 9. Art der Ordnung h in Elementen $b^{\mathfrak{K}}$ der Form (21). Da weiterhin die Klasse der Mengen $\mathfrak{K}$ die Mächtigkeit des Kontinuums hat, folgt, daß die Klasse K_0^h ebenfalls die Mächtigkeit des Kontinuums hat.

Folgerung. Die Klasse der Minimalbasen 7. Art der Ordnung $h (h \geqq 2)$ für $\mathfrak{Z}$ mit der Dichte 0 hat die Mächtigkeit des Kontinuums. Damit ist also für den Fall $\mathfrak{M} = \mathfrak{Z}$ nochmals Satz 12 bewiesen.

§ 8. Variation des Basisbegriffs.

26. Sei $\mathfrak{M} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ mit $x_0 = 0$ und $x_n < x_{n+1}$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$ eine (endliche oder unendliche) Menge nichtnegativer ganzer Zahlen. Eine Folge $\mathfrak{B}^{(k)} = \{b_0, b_1, b_2, \ldots\}$ ($b_0 = 0$, $b_\nu > 0$ für $\nu > 0$) nichtnegativer ganzer Zahlen, in der auch Zahlen mehrmals (aber je nur in endlicher Anzahl) als Elemente auftreten dürfen, soll eine *k-Basis der Ordnung* $h (k \geqq 1, h \geqq 1)$ für die Menge $\mathfrak{M}$ heißen, wenn es für jedes $x_n \in \mathfrak{M}$ mindestens k Darstellungen der Form $x_n = b_{\nu_1} + \cdots + b_{\nu_h}$ gibt derart, daß alle auftretenden positiven Indizes verschieden sind. Ist $\mathfrak{B}^{(k)}$ eine k-Basis der Ordnung h für $\mathfrak{M}$, so soll diese Aussage durch die Schreibweise

$$h \times \mathfrak{B}^{(k)} \geqq \mathfrak{M}_{[k]}$$

zum Ausdruck kommen.

Mit anderen Worten gilt also: Aus $\mathfrak{B}^{(k)}$ wählt man zur Darstellung einer positiven Zahl $x_n \in \mathfrak{M}$ höchstens h geeignete positive Elemente so aus, daß x_n Summe dieser Elemente ist. Für die Restfolge $\mathfrak{B}_1^{(k)}$ gilt immer noch $x_n \in h \times \mathfrak{B}_1^{(k)}$; aus $\mathfrak{B}_1^{(k)}$ wählt man wiederum höchstens h geeignete positive Elemente so aus, daß x_n Summe dieser Elemente ist. Für die Restfolge $\mathfrak{B}_2^{(k)}$ gilt auch noch $x_n \in h \times \mathfrak{B}_2^{(k)}$. Usw. Erst für die Restfolge $\mathfrak{B}_k^{(k)}$ kann gelten $x_n \notin h \times \mathfrak{B}_k^{(k)}$.

Auch im Fall $k = 1$ weicht der Begriff der 1-Basis von dem bisher betrachteten Basisbegriff ab. Bei einer Basis der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ darf zur Darstellung einer Zahl $x_n \in \mathfrak{M}$ ein Basiselement mehrfach benutzt werden, obgleich jedes Basiselement nur einmal in der Basis enthalten ist. Eine 1-Basis der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ dagegen enthält jedes positive Element mindestens so oft, wie es maximal bei der Darstellung jeder festen Zahl $x_n \in \mathfrak{M}$ benötigt wird.

Einige Beispiele sollen die Definition noch etwas erläutern:

1) Man erhält eine 1-Basis $\mathfrak{B}^{(1)}$ der Ordnung h für $\mathfrak{M}$, indem man in einer Basis $\mathfrak{B}$ der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ jedes positive Element h-mal setzt.

2) Man erhält eine k-Basis $\mathfrak{B}^{(k)}$ der Ordnung h für $\mathfrak{M}$, indem man k 1-Basen $\mathfrak{B}_1^{(1)}, \ldots, \mathfrak{B}_k^{(1)}$ der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ zu einer Folge $\mathfrak{B}^{(k)}$ zusammenfaßt, wobei die mehrfachen Elemente in ihrer Vielfachheit stehen bleiben.

3) Jede k-Basis für $\mathfrak{Z}$ enthält das Element 1 natürlich k-mal.

Im übrigen lassen sich alle Definitionen aus § 1 sofort übertragen. Insbesondere verstehen wir unter der Anzahlfunktion $B^{(k)}(x)$, $0 \leqq x$ reell, die Anzahl der positiven Elemente $\leqq [x]$ von $\mathfrak{B}^{(k)}$, wobei jedes Element seiner Vielfachheit entsprechend gezählt wird. Wir können dann zeigen

Satz 44. *Es gibt k-Basen $\mathfrak{B}^{(k)}$ der Ordnung h für $\mathfrak{Z}$ mit $B^{(k)}(n) = O\left(\sqrt[h]{n}\right)$.*

Beweis. Wie wir wissen, gibt es gewöhnliche Basen $\mathfrak{B}$ der Ordnung h für $\mathfrak{Z}$ mit $B(n) = O\left(\sqrt[h]{n}\right)$. Wenn man $k \cdot h$ Exemplare einer solchen Basis zusammenfaßt, wobei die mehrfachen Elemente stehenbleiben, erhält man nach Beispiel 1) und 2) eine k-Basis $\mathfrak{B}^{(k)}$ der Ordnung h für $\mathfrak{Z}$, für die $B^{(k)}(n) = O\left(\sqrt[h]{n}\right)$ gilt.

Zusatz. Die Basis (17) ist, wie man sich leicht überlegt, 1-Basis der Ordnung h für $\mathfrak{Z}$ mit $B^{(1)}(n) = O\left(\sqrt[h]{n}\right)$.

27. Wir wollen uns nun auch hier der Frage der Minimalbasen zuwenden. Die Definitionen aus § 1 übertragen sich sinngemäß, so daß wir sie nicht noch einmal gesondert zu formulieren brauchen. Man muß nur für „Basis $\mathfrak{B}$" stets „k-Basis $\mathfrak{B}^{(k)}$" setzen. Hinsichtlich ihrer Existenz gilt zunächst in Analogie zu den gewöhnlichen Basen

Satz 45. *Für keine Ordnung $h \geqq 2$ gibt es 1-Minimalbasen 1. Art für $\mathfrak{Z}$.*

Beweis. Angenommen, $\mathfrak{B}^{(1)}$ wäre eine 1-Basis der Ordnung $h (h \geqq 2)$ für $\mathfrak{Z}$, die der Minimalbasisdefinition 1 genügt. Wir werden zeigen, daß dann $\mathfrak{B}^{(1)}$ periodisch ist. Die Zahlenmenge $\mathfrak{A} = \{0, 1, 2, 4, 8, \ldots, 2^{h-1}, (2^h - 1) + 1, 2(2^h - 1) + 1, \ldots, t(2^h - 1) + 1, \ldots\}$ ist 1-Basis der Ordnung h für $\mathfrak{Z}$, denn alle Zahlen $0 \leqq z \leqq 2^h - 2$ sind als Summe von $h - 1$ Elementen und $z = 2^h - 1$ ist als Summe von h Elementen aus $\mathfrak{A}$ darstellbar (Zifferndarstellung von z im dyadischen Ziffernsystem).

Aus der Minimalbasisdefinition folgt, daß $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}^{(1)} \geqq \{0, 1, 2, 4, \ldots, 2^{h-1}, (2^h - 1) + 1\}$ ist. Sei nun schon für $t \geqq 1$ gezeigt, daß

$$\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}^{(1)} \geqq \{0, 1, 2, 4, \ldots, 2^{h-1}, \ (2^h - 1) + 1, \ldots, t(2^h - 1) + 1\}$$

ist. Wenn dann eine Zahl n mit $t(2^h - 1) + 1 < n \leqq (t + 1)(2^h - 1)$ in $\mathfrak{B}^{(1)}$ liegt, dann widerspricht das der Minimalbasisdefinition; dagegen gilt $(t + 1)(2^h - 1) + 1 \in \mathfrak{B}^{(1)}$ wegen der Basiseigenschaft. Damit ist $\mathfrak{B}^{(1)} = \mathfrak{A}$, also periodisch.

Unter Heranziehung von Satz 44 erhält man einen Widerspruch.

28. Wir beschränken uns im folgenden auf k-Minimalbasen 7. Art. Hier läßt sich der Existenzsatz, der für gewöhnliche Minimalbasen 7. Art gilt, sofort übertragen.

Satz 46. *In jeder k-Basis der Ordnung h für eine Menge $\mathfrak{M}$ ist eine k-Minimalbasis 7. Art der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ als Teilmenge enthalten.*

Beweis. Wir schließen wie bei Stöhr [8]. Sei $\mathfrak{B}_1^{(k)}$ eine k-Basis der Ordnung h für $\mathfrak{M}$. Wir konstruieren von $\mathfrak{B}_1^{(k)}$ ausgehend eine (endliche oder unendliche) Folge von k-Basen $\mathfrak{B}_1^{(k)} > \mathfrak{B}_2^{(k)} > \cdots$ der Ordnung h für $\mathfrak{M}$. Es sei $\mathfrak{B}_n^{(k)}$ bereits konstruiert. Entweder ist $\mathfrak{B}_n^{(k)}$ eine k-Minimalbasis 7. Art; dann brechen wir die Folge mit diesem Glied ab. Oder es gibt ein $b \in \mathfrak{B}_n^{(k)}$ so, daß die durch Weglassen von b aus $\mathfrak{B}_n^{(k)}$ entstehende Folge $\mathfrak{B}_n^{(k)} - \{b\}$ eine k-Basis der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ ist; sei dann b_n so beschaffen, daß es kein kleineres der-

artiges b gibt. In diesem Fall setzen wir $\mathfrak{B}_{n+1}^{(k)} = \mathfrak{B}_n^{(k)} - \{b_n\}$. Man sieht nun leicht, daß der Durchschnitt $\mathfrak{B}^{(k)}$ aller Glieder der endlichen oder unendlichen Folge $\mathfrak{B}_1^{(k)} > \mathfrak{B}_2^{(k)} > \cdots$ sowohl Teilmenge von $\mathfrak{B}_1^{(k)}$ als auch k-Minimalbasis 7. Art der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ ist.

Der Satz 12 aus § 3 gilt hier ebenfalls in ganz analoger Form:

Satz 47. *Ist $\mathfrak{M}$ unendlich, so hat die Klasse der k-Minimalbasen 7. Art genau h-ter Ordnung ($h \geqq 2$) für $\mathfrak{M}$ die Mächtigkeit des Kontinuums.*

Beweis. Wir erweitern jede im Beweis zu Satz 12 konstruierte Minimalbasis $\mathfrak{B}$ 7. Art der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ zu einer k-Basis $\widetilde{\mathfrak{B}}^{(k)}$ der Ordnung h für $\mathfrak{M}$, indem wir in $\mathfrak{B}$ jedes Element $k \cdot h$-mal setzen. Nun bestimmen wir zu jeder k-Basis $\widetilde{\mathfrak{B}}^{(k)}$ eine nach Satz 46 darin enthaltene k-Minimalbasis $\mathfrak{B}^{(k)}$ 7. Art der Ordnung h für $\mathfrak{M}$. Mit der Klasse der Minimalbasen $\mathfrak{B}$ 7. Art der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ hat dann auch die Klasse der k-Minimalbasen $\mathfrak{B}^{(k)}$ 7. Art der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ die Mächtigkeit des Kontinuums.

Über k-Minimalbasen 7. Art beweisen wir noch

Satz 48. *Ist $\mathfrak{M}$ unendlich, so gibt es zu jeder k-Minimalbasis $\mathfrak{B}^{(k)}$ 7. Art der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ unendlich viele Zahlen $x_n \in \mathfrak{M}$, die genau k-mal (und nicht $(k+1)$-mal) durch h Summanden aus $\mathfrak{B}^{(k)}$ darstellbar sind.*

Beweis. Angenommen, die k-Minimalbasis $\mathfrak{B}^{(k)}$ 7. Art der Ordnung h für $\mathfrak{M}$ hätte für alle Zahlen $x_n \in \mathfrak{M}$, $x_n \geqq N$ mehr als k Darstellungen. Sei die Zahl $b > N$ Element von $\mathfrak{B}^{(k)}$. Auf Grund der Minimalbasiseigenschaft von $\mathfrak{B}^{(k)}$ gibt es eine Zahl $x(b) \in \mathfrak{M}$, die ohne Benutzung von Elementen b nicht k-mal darstellbar ist. Es mögen zur k-fachen Darstellung von $x(b)$ mindestens $t \geqq 1$ Summanden b benötigt werden. Es ist also $x(b) > N$. Daher hat $x(b)$ nach Voraussetzung noch eine $(k+1)$-te Darstellung. In dieser muß mindestens ein Summand b auftreten, denn sonst würden zur k-fachen Darstellung von $x(b)$ weniger als t Summanden b benötigt. In $\mathfrak{B}^{(k)}$ sind also $t' \geqq t+1$ Elemente b enthalten.

Da $\mathfrak{B}^{(k)}$ k-Minimalbasis 7. Art ist, gibt es — man wiederhole den oben gemachten Schluß — eine Zahl $x'(b) \in \mathfrak{M}$ derart, daß zur k-fachen Darstellung dieser Zahl $t_1' \geqq t'$ Elemente b benötigt werden. $x'(b)$ hat aber noch eine $(k+1)$-te Darstellung. Diese ist auch nur mit Benutzung von Summanden b möglich, denn sonst würden zur k-fachen Darstellung von $x'(b)$ die t_1' Elemente b gar nicht benötigt. Also enthält $\mathfrak{B}^{(k)}$

$$t'' \geqq t_1' + 1 > t_1' \geqq t' \geqq t + 1 > t$$

Elemente b.

In dieser Weise fortfahrend kann man nun zeigen, daß $\mathfrak{B}^{(k)}$ mehr als $s \geqq k \cdot h$ Elemente b enthalten müßte, was einen Widerspruch bedeutet.

29. Für den Rest dieses Paragraphen wollen wir uns auf den Fall $\mathfrak{M} = \mathfrak{Z}$ beschränken. — Da in k-Basen eine Zahl mehrmals als Element auftreten kann, besteht für die Dichte $\operatorname*{fin}\limits_{n=\overline{1,2,\ldots}} \dfrac{B^{(k)}(n)}{n}$ die Möglichkeit, daß sie größer als 1 wird. Z. B. ist

$$\mathfrak{B}^{(k)} = \left\{0; \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{k \cdot h \text{ Elemente}}; \underbrace{h+1, 2h+1, \ldots, th+1, \ldots}_{\text{je } k \text{ Elemente}}\right\}$$

k-Minimalbasis 7. Art der Ordnung h (für $\mathfrak{Z}$) und hat die Dichte $\dfrac{k}{h}$, was für $k > h$ größer als 1 ausfällt.

Entsprechend wie für gewöhnliche Basen gilt

Satz 49. *Die Klasse der k-Minimalbasen 7. Art der Ordnung $h (h \geqq 2)$ für $\mathfrak{Z}$ mit positiver Dichte hat die Mächtigkeit des Kontinuums.*

Ein Analogon zu Satz 25 existiert für k-Basen allerdings nicht. Man wird hier logischerweise die Menge $\mathfrak{A}$ durch eine endliche Folge ersetzen müssen, in der dann auch Zahlen mehrmals als Elemente auftreten können. Dann ist zunächst klar, daß, wenn $\mathfrak{A}$ in einer k-Minimalbasis 7. Art der Ordnung h enthalten sein soll, eine Zahl höchstens $k \cdot h$-mal als Element in $\mathfrak{A}$ auftreten darf.

Wir wollen nun zeigen, daß es keine 1-Minimalbasis 7. Art der Ordnung $h (h \geqq 2)$ für $\mathfrak{Z}$ gibt, die die endliche Folge $\mathfrak{A} = \{1, 1, 2, 4, 8, \ldots, 2^s\}$ mit $s > h$ enthält. Man kann nämlich in den Darstellungen, in denen das Element 1 zweimal benützt wird, $1 + 1$ durch 2 ersetzen.

Wird 2 schon benötigt, dann kann man $2 + 1 + 1$ durch 4 ersetzen;
wird auch 4 schon benötigt, dann kann man $4 + 2 + 1 + 1$ durch 8 ersetzen;
wird auch 8 schon benötigt, dann kann man $8 + 4 + 2 + 1 + 1$ durch 16 ersetzen;
usw.

Da die Anzahl der Summanden durch die Ordnung beschränkt ist, gibt es ein Element 2^r derart, daß $2^{r-1} + 2^{r-2} + \cdots + 2 + 1 + 1$ durch 2^r ersetzbar ist. Also werden die zwei Elemente 1 nicht benötigt.

Literaturverzeichnis.

[1] *L. Chatrovsky*, Sur les bases minimales de la suite des nombres naturels (russ.). Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. **4** (1940), 335—339, 339—340.

[2] *F. J. Dyson*, A theorem on the densities of sets of integers. J. London Math. Soc. **20** (1945), 8—14.

[3] *H. H. Ostmann*, Additive Zahlentheorie. I, Ergebnisse der Mathematik, Berlin u. Heidelberg 1956.

[4] *D. Raikov*, Über die Basen der natürlichen Zahlenreihe (russ. u. dtsch.). Mat. Sbornik N. S. **2**(=**44**) (1937), 595—597.

[5] *H. Rohrbach*, Ein Beitrag zur additiven Zahlentheorie. Math. Zeitschr. **42** (1937), 1—30.

[6] *H. Rohrbach*, Einige neuere Untersuchungen über die Dichte in der additiven Zahlentheorie. Jahresber. d. DMV **48** (1938), 199—236.

[7] *A. Stöhr*, Eine Basis h-ter Ordnung für die Menge aller natürlichen Zahlen. Math. Zeitschr. **42** (1937), 739—743.

[8] *A. Stöhr*, Gelöste und ungelöste Fragen über Basen der natürlichen Zahlenreihe. Journal f. d. reine u. angewandte Mathematik **194** (1955), 40—65, 111—140.

Eingegangen 12. Mai 1955.

Über eine Vermutung von Hasse zum Erweiterungsproblem galoisscher Zahlkörper *).

Von *Gudrun Beyer* in Hamburg.

Die Faktorgruppe $\mathfrak{g} = \mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ der endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ nach dem abelschen Normalteiler $\mathfrak{A}$ sei als Galoisgruppe des endlich algebraischen Zahlkörpers Ω/Ω_0 realisiert. Das Erweiterungsproblem von Ω/Ω_0 mit $\mathfrak{G}$ besteht in der Aufgabe, Ω/Ω_0 zu einem galoisschen Körper K/Ω_0 mit der Galoisgruppe $\mathfrak{G}$ zu erweitern:

$$\begin{tikzcd} \overset{\mathfrak{g}}{\bullet} \arrow[r, dash] & \overset{1}{\bullet} \\ \Omega_0 & \Omega \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \overset{\mathfrak{G}}{\bullet} \arrow[r, dash] & \overset{\mathfrak{A}}{\bullet} \arrow[r, dash] & \overset{1}{\bullet} \\ \Omega_0 & \Omega & \mathsf{K} \end{tikzcd}$$

Die gelegentlich gemachte Einheitswurzelvoraussetzung über Ω bedeute, daß Ω die n-ten Einheitswurzeln enthält, wo n der Exponent (die maximale Elementordnung) von $\mathfrak{A}$ ist.

Mit Hasse [5] werde das *Erweiterungsproblem* $\mathfrak{E}$ noch etwas schwächer gefaßt: Es wird nicht ein galoisscher Körper K gesucht, sondern nur eine (kommutative) *galoissche Algebra* K, d. h. eine kommutative halbeinfache Algebra mit $\mathfrak{G}$ als Automorphismengruppe über Ω_0, die eine Normalbasis bezüglich $\mathfrak{G}$ besitzt. Unter der Einheitswurzelvoraussetzung sprach Hasse [5] die Vermutung (V.) aus, daß eine gewisse, für die Lösbarkeit des Erweiterungsproblems notwendige Bedingung (Existenz eines Verkettungssystems für das Problem) auch hinreichend ist. Diese Vermutung ist von Faddeev [4] durch ein Gegenbeispiel mit zyklischem Normalteiler $\mathfrak{A}$ widerlegt worden. Andererseits hat sich gezeigt [1], daß sie durchweg richtig ist, wenn nur $\mathfrak{A}$ zyklisch von ungerader Ordnung ist. Hier soll deshalb im Anschluß an Untersuchungen von H. Richter [8], [9] eine ganze Reihe weiterer Gegenbeispiele mit zyklischem $\mathfrak{A}$ angegeben werden.

Zunächst wird dazu gezeigt, daß aus der Vermutung (V.) auf die entsprechende Aussage ohne Einheitswurzelvoraussetzung geschlossen werden kann[1]).

Unter der Einheitswurzelvoraussetzung hat Richter [8] aus der Vermutung (V.) auf die Monodromieaussage geschlossen, daß die Erweiterbarkeit von Ω/Ω_0 mit $\mathfrak{G}$ schon garantiert wäre durch die Erweiterbarkeit aller lokalen Hüllen (mit jeweils geeignet erklärter Untergruppe von $\mathfrak{G}$)[2]). Andererseits hat Richter [9] Gegenbeispiele gegen diese Monodromieaussage angegeben, die aber nicht die Einheitswurzelvoraussetzung erfüllen.

Hier wird nun die zuerst erwähnte Untersuchung von Richter von der Einheitswurzelvoraussetzung befreit.

---

*) Umgearbeitete Fassung von Teil II meiner Dissertation (Hamburg 1955).

[1]) Die hierbei angewandte Schlußweise, die ohne weiteres auch auf den Fall eines nicht-abelschen $\mathfrak{A}$ übertragbar ist, tritt in Spezialfällen bei Reichardt [7] und Delone-Faddeev [3] auf.

Als Nebenergebnis sei erwähnt, daß die ohne Einheitswurzelvoraussetzung formulierte Vermutung (V.) richtig ist, wenn nur $\mathfrak{A}$ zyklisch von ungerader Ordnung ist.

1. Ein System B_S von den $S \in \mathfrak{G}$ zugeordneten regulären Elementen des Gruppenringes N von $\mathfrak{A}$ über Ω heißt *Verkettungssystem* für das Erweiterungsproblem $\mathfrak{E}$, wenn es den ersten Verkettungsgleichungen genügt. Zur Formulierung dieser Gleichungen werden die Galois-Automorphismen von Ω/Ω_0, die dem vorgegebenen Homomorphismus von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{g}$ entsprechend mit denselben Zeichen S wie die Elemente von $\mathfrak{G}$ bezeichnet werden können:

$$a \to a^S \qquad (a \text{ aus } \Omega),$$

und die durch die inneren Automorphismen von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{A}$ induzierten Automorphismen

$$A \to A^S = S^{-1}AS \qquad (A \text{ aus } \mathfrak{A})$$

auf den Gruppenring N fortgesetzt vermöge der Definition

$$\Big(\sum_A A a_A\Big)^S = \sum_A A^S a_A^S.$$

Damit lauten die *ersten Verkettungsgleichungen*[3]):

$$B_{ST} = B_T B_S^T, \quad B_A = A.$$

Bekanntlich [3], [5] ist die Existenz eines Verkettungssystems für $\mathfrak{E}$ notwendig für die Lösbarkeit des Problems $\mathfrak{E}$. Die **Vermutung (V.)**, daß sie unter der Einheitswurzelvoraussetzung für Ω auch hinreicht, ist richtig, wenn $\mathfrak{A}$ zyklisch von ungerader Ordnung ist [1], im allgemeinen aber nicht [4]. Es soll jetzt gezeigt werden: Ist die Vermutung (V.) bei gegebenem Typus $\mathfrak{A}_0$ von $\mathfrak{A}$ richtig, so ist die Existenz eines Verkettungssystems hinreichend für die Lösbarkeit des Problems $\mathfrak{E}$ (**Vermutung (V.*)**) mit zu $\mathfrak{A}_0$ isomorphen $\mathfrak{A}$, auch wenn die Einheitswurzelvoraussetzung nicht erfüllt ist. Damit ist

---

[2]) Daß Richter sich in der Arbeit [8] durchweg (in der Bezeichnungsweise unserer Fußnote [3])) auf den Fall $\chi_S = \chi$ beschränkt, was sich durch seine Bedingung (1) ausdrückt, beruht lediglich darauf, daß damals nur in diesem Fall die Richtigkeit der Vermutung (V.) bekannt war. Im übrigen behandelt Richter nur das Erweiterungsproblem in seiner schärferen Fassung, in der nach einem Erweiterungskörper K gefragt wird. Das bedingt einerseits seine etwas schwerfällige Definition der zugeordneten lokalen Erweiterungsprobleme, die aber mit unserer (s. Abschnitt 3) gleichwertig ist. Andererseits kann Richter auf die Lösbarkeit des Erweiterungsproblems im Großen nur dann schließen, wenn die Gruppenerweiterung $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{A}$ reduziert ist (dann ist nämlich jede Erweiterungsalgebra K notwendig ein Körper). Seine Schlußweise reicht aber völlig für die oben genannte Aussage aus. — Liegt insbesondere $\mathfrak{A}$ im Zentrum von $\mathfrak{G}$, so kann Richter mit Hilfe einer Erweiterungsalgebra K einen Erweiterungskörper K_1 konstruieren. In der Bezeichnungsweise aus dem Beweis zu unserem Satz 4 lautet sein Gedankengang: $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0\mathfrak{A}$ ist Faktorgruppe des direkten Produktes $\mathfrak{G}_0 \times \mathfrak{A}$. Deshalb gibt es einen Körper K_1 der gesuchten Art unter den Teilkörpern des Kompositums $\mathsf{K}_0\Lambda$, wo Λ/Ω_0 ein zu K_0 fremder Körper mit der Gruppe $\mathfrak{A}$ ist.

[3]) Sie treten in der Literatur noch in den folgenden Formen auf. 1) Sind $s, t, \ldots$ die Elemente von $\mathfrak{g}$, und zwar bzw. die Restklassen von $S, T, \ldots$, und ist U_s ein Vertretersystem von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{A}$, so genügen die $B_s = B_{U_s}$ den Gleichungen

$$B_{st} Q_{s,t} = B_t B_s^{U_t},$$

wo $Q_{s,t} = U_{st}^{-1} U_s U_t$ das Faktorensystem zu U_s bedeutet. Ist umgekehrt eine Lösung dieser Gleichungen gegeben, so ist $B_{U_s A} = B_s A$ ein Verkettungssystem. 2) Unter der Einheitswurzelvoraussetzung zerfällt N in eine direkte Summe zum Grundkörper isomorpher Körper, die den absolut irreduziblen Charakteren χ von $\mathfrak{A}$ zugeordnet sind. Die Automorphismen S von N permutieren diese Körper. Die zugeordneten Permutationen der χ seien $\chi \to \chi_S$. Dann erfüllen die Komponenten $b_{\chi, S}$ eines Verkettungssystems B_S nach dieser direkten Zerlegung von N die Gleichungen

$$b_{\chi, ST} = b_{\chi, T}\, b^T_{\chi_{T^{-1}}, S}, \quad b_{\chi, A} = \chi(A).$$

3) Wendet man auf die Form 2) die Reduktion 1) an, so erhält man die von Hasse [5] angegebene Form der ersten Verkettungsgleichungen.

dann insbesondere die Vermutung (V.*) nachgewiesen für den Fall, daß $\mathfrak{A}$ zyklisch von ungerader Ordnung ist.

Für eine Vorbetrachtung bemerke man, daß es jedenfalls dann immer ein Verkettungssystem für $\mathfrak{E}$ gibt, wenn $\mathfrak{A}$ direkter Faktor in $\mathfrak{G}$ ist:

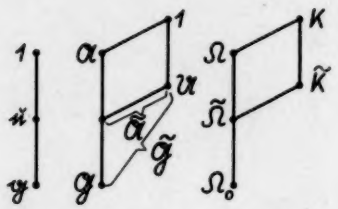
$$\mathfrak{G} = \mathfrak{U} \times \mathfrak{A}.$$

Man setze nämlich in diesem Fall

$$B_U = 1,\ B_A = A, \text{ und allgemein } B_{UA} = A \text{ für } U \text{ aus } \mathfrak{U},\ A \text{ aus } \mathfrak{A}.$$

Ist $\mathfrak{A}$ nur direkter Faktor in dem Normalteiler

$$\{\mathfrak{U}, \mathfrak{A}\} = \mathfrak{U} \times \mathfrak{A}$$



Figur 1

von $\mathfrak{G}$[4]), und ist dann $\mathfrak{u} = \mathfrak{U}\mathfrak{A}/\mathfrak{A}$ die $\mathfrak{U}$ entsprechende, zu $\mathfrak{U}$ isomorphe Untergruppe von $\mathfrak{g}$, so betrachte man das Problem $\tilde{\mathfrak{E}}$, den Invarianzkörper $\tilde{\Omega}$ von $\mathfrak{u}$ in eine galoissche Algebra $\tilde{\mathsf{K}}$ mit der Gruppe $\tilde{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}/\mathfrak{U}$ einzubetten. Zwischen $\mathfrak{E}$ und $\tilde{\mathfrak{E}}$ besteht der folgende Zusammenhang:

Satz 1. *Es sei $\mathfrak{A}$ direkter Faktor in dem Normalteiler $\mathfrak{U} \times \mathfrak{A}$ von $\mathfrak{G}$. Dann gilt mit den soeben eingeführten Bezeichnungen*: a) *Gibt es ein Verkettungssystem für $\tilde{\mathfrak{E}}$, so gibt es auch ein solches für $\mathfrak{E}$.* b) *Ist $\mathfrak{E}$ lösbar, so ist auch $\tilde{\mathfrak{E}}$ lösbar.*

Bemerkung. Wenn die Vermutung (V.*) für alle Erweiterungsprobleme mit zu $\mathfrak{A}_0$ isomorphem Normalteiler zutrifft, so sind damit die beiden Erweiterungsprobleme $\mathfrak{E}$, $\tilde{\mathfrak{E}}$ als äquivalent nachgewiesen.

Beweis von Satz 1. a). Die Restklasse von S nach $\mathfrak{U}$ sei $\tilde{S}$. Der dem reduzierten Problem $\tilde{\mathfrak{E}}$ zugeordnete Normalteiler ist $\tilde{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}\mathfrak{U}/\mathfrak{U} \cong \mathfrak{A}$. Unter Zugrundelegung des natürlichen Isomorphismus zwischen $\mathfrak{A}$ und $\tilde{\mathfrak{A}}$ möge der Gruppenring $\tilde{N}$ von $\tilde{\mathfrak{A}}$ über $\tilde{\Omega}$ als Teilring von N aufgefaßt werden, und zwar als die Gesamtheit der bei den Automorphismen U aus $\mathfrak{U}$ invarianten Elemente:

$$\Big(\sum_A A a_A\Big)^U = \sum_A A a_A \longleftrightarrow a_A^U = a_A \text{ für alle } A.$$

Die Wirkung des Automorphismus S auf $\tilde{N}$ ist dann identisch mit der Wirkung von $\tilde{S}$:

$$B^S = B^{\tilde{S}} \text{ für } B \text{ aus } \tilde{N}.$$

Ist nun $\tilde{B}_{\tilde{S}}$ ein Verkettungssystem für $\tilde{\mathfrak{E}}$, so wird deshalb durch

$$B_S = \tilde{B}_{\tilde{S}} \text{ für alle } S \text{ aus der Restklasse } \tilde{S}$$

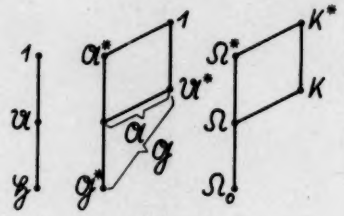
ein Verkettungssystem B_S für $\mathfrak{E}$ definiert.

---

[4]) $\mathfrak{G}$ ist dann durch $\mathfrak{G}/\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ eindeutig bestimmt und heißt nach Arnold Scholz [10] relatives Produkt von $\mathfrak{G}/\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ zur Durchschnittsfaktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{U} \times \mathfrak{A}$.

b) Ist K eine Lösung des Erweiterungsproblems $\mathfrak{E}$ und $\widetilde{K}$ die Invarianzteilalgebra bei $\mathfrak{U}$, so ist, da $\mathfrak{U}$ Normalteiler in $\mathfrak{G}$ ist, $\widetilde{K}$ galoissch über Ω_0 mit der Gruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{U}$, löst also das reduzierte Erweiterungsproblem $\widetilde{\mathfrak{E}}$.

Um nun die Äquivalenz der Vermutungen (V.) und (V.*) bei gegebenem Typus $\mathfrak{A}_0$ nachzuweisen, betrachte man ein beliebiges Erweiterungsproblem $\mathfrak{E}$. Es sei Ω^* der Körper der n-ten Einheitswurzeln über Ω. Zur Anwendung von Satz 1 soll dann Ω die Rolle des dortigen $\widetilde{\Omega}$, und Ω^* die Rolle des dortigen Ω übernehmen. Es ist also eine Gruppe $\mathfrak{G}^*$ zu



Figur 2

konstruieren, die die Galoisgruppe $\mathfrak{H}$ von Ω^*/Ω_0 als Faktorgruppe mit einem Kern $\mathfrak{A}^* \cong \mathfrak{A}$ besitzt, derart, daß die gruppentheoretische Situation von Satz 1 vorliegt, d. h. daß $\mathfrak{G}^*$ relatives Produkt von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ zur Durchschnittsfaktorgruppe $\mathfrak{g}$ ist ([10], s. a. Fußnote [4])). Wenn $\mathfrak{U}$ der Kern der Faktorgruppe $\mathfrak{g}$ von $\mathfrak{H}$ oder die Galoisgruppe von Ω^*/Ω ist, so muß also $\mathfrak{G}^*$ zwei zu $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{g}$-isomorphe Normalteiler $\mathfrak{U}^*$, $\mathfrak{A}^*$ mit den Faktorgruppen

$$\mathfrak{G}^*/\mathfrak{U}^* \cong \mathfrak{G}, \quad \mathfrak{G}^*/\mathfrak{A}^* \cong \mathfrak{H}$$

und mit dem Kompositium

$$\{\mathfrak{U}^*, \mathfrak{A}^*\} = \mathfrak{U}^* \times \mathfrak{A}^*$$

enthalten. Die eindeutige Existenz dieses relativen Produktes steht aber nach Arnold Scholz [10] fest: Man kann $\mathfrak{G}^*$ etwa definieren als Gruppenerweiterung von $\mathfrak{U}^* \times \mathfrak{A}^*$ mit der Faktorgruppe $\mathfrak{g}$ und mit dem Schreierschen Faktorensystem, daß sich aus den Faktorensystemen zu $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{U}$ und zu $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{g}$-isomorphe Übertragung nach $\mathfrak{U}^*$ und $\mathfrak{A}^*$ und durch direkte Multiplikation ergibt.

Man hat somit das folgende Resultat:

Satz 2. a) *Ist bei gegebenem Typus $\mathfrak{A}_0$ von $\mathfrak{A}$ die Vermutung* (V.) *richtig, so ist für diesen Typus $\mathfrak{A}_0$ auch* (V.*) *richtig. Man kann also in der Aussage* (V.) *dann die Einheitswurzelvoraussetzung fortlassen.*

b) *Es sei nämlich $\mathfrak{E}$ irgendein Erweiterungsproblem mit $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}_0$, Ω^* der Körper der n-ten Einheitswurzeln über Ω und $\mathfrak{G}^*$ das relative Produkt von $\mathfrak{G}$ mit der Galoisgruppe von Ω^*/Ω_0 zur Durchschnittsfaktorgruppe $\mathfrak{g}$, aufgefaßt als Gruppenerweiterung von $\mathfrak{A}$, und $\mathfrak{E}^*$ das Erweiterungsproblem von Ω^*/Ω_0 mit $\mathfrak{G}^*$.*

Gibt es dann zu $\mathfrak{E}$ ein Verkettungssystem, so auch zu $\mathfrak{E}^*$. Ist aber das Problem $\mathfrak{E}^*$ lösbar, so auch $\mathfrak{E}$.

Der Beweis von b) ist durch Satz 1 gegeben, und a) folgt aus b).

Bemerkung. Nach [1] ist damit insbesondere bewiesen: Die Existenz eines Verkettungssystems reicht für die Lösbarkeit des Erweiterungsproblems $\mathfrak{E}$ auch hin, wenn $\mathfrak{A}$ zyklisch von ungerader Ordnung ist, oder wenn $\mathfrak{A}$ eine zyklische 2-Gruppe, $\mathfrak{G}$ abelsch und der Körper der n-ten Einheitswurzeln über Ω_0 zyklisch ist.

Im letzteren Fall ist dann nämlich für das in Satz 2 genannte Erweiterungsproblem $\mathfrak{E}^*$ die in [1] eingeführte Gruppe Γ isomorph zur zyklischen Galoisgruppe des Körpers der n-ten Einheitswurzeln über Ω_0, weil $\mathfrak{G}$ abelsch ist, so daß nach den dortigen Sätzen 6 und 7 die Vermutung (V.) für $\mathfrak{E}^*$ zutrifft.

2. Bekannt sind die folgenden Tatsachen über galoissche Algebren.

Eine kommutative halbeinfache Algebra K/Ω_0 mit der Automorphismengruppe $\mathfrak{G}$ ist dann und nur dann galoissch mit $\mathfrak{G}$, wenn Ω_0 die Gesamtheit aller bei $\mathfrak{G}$ invarianten Elemente und der Rang von K/Ω_0 mindestens gleich der Ordnung von $\mathfrak{G}$ ist:

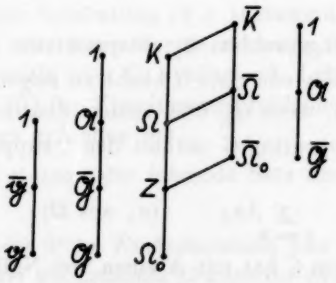
$$[\mathsf{K}:\Omega_0] \geqq (\mathfrak{G}:1).$$

Ist K/Ω_0 galoissch mit $\mathfrak{G}$, so ist jede Ringerweiterung (d. h. durch Grundkörpererweiterung entstehende Algebra) galoissch mit derselben Gruppe $\mathfrak{G}$, fortgesetzt vermöge der Definition, daß der erweiterte Grundkörper elementweise invariant sein soll. Ferner ist dann K die direkte Summe unter $\mathfrak{G}$ konjugierter (also insbesondere zueinander isomorpher) Körper K_i, und in jedem K_i bilden die Elemente von $\mathfrak{G}$, bei denen K_i zulässig (d. h. als Ganzes invariant) ist, eine Galoisgruppe über Ω_0. Ist K Körper, so ist seine Galoisgruppe eindeutig bestimmt, im allgemeinen aber nicht.

Voraussetzungsgemäß ist Ω/Ω_0 ein endlich algebraischer Zahlkörper mit der Gruppe $\mathfrak{g}$. Ist $\mathfrak{p}$ eine Primstelle von Ω_0 und $\overline{\Omega}_0$ die zugehörige perfekte Hülle von Ω_0, so ist die Ringerweiterung $\Omega_{\overline{\Omega}_0}$ von Ω/Ω_0 auf $\overline{\Omega}_0$ eine galoissche Algebra mit der Gruppe $\mathfrak{g}$. Ihre einfachen Ideale sind isomorph zur perfekten Hülle $\overline{\Omega}$ von Ω bei einer Fortsetzung von $\mathfrak{p}$ auf Ω, und die Galoisgruppen dieser einfachen Ideale sind die verschiedenen (zueinander in $\mathfrak{g}$ konjugierten) Zerlegungsgruppen zu $\mathfrak{p}$.

3. Es soll nun ein Monodromiesatz für die Existenz eines Verkettungssystems hergeleitet werden. Er läuft im wesentlichen auf den bekannten Monodromiesatz für einfache Algebren hinaus: Eine zentrale einfache Algebra über einem endlich algebraischen Zahlkörper zerfällt dann und nur dann, wenn sie überall im Kleinen zerfällt.

Dazu werde dem Erweiterungsproblem $\mathfrak{E}$ an jeder Primstelle $\mathfrak{p}$ von Ω_0 ein lokales Erweiterungsproblem $\mathfrak{E}_\mathfrak{p}$ zugeordnet, das sicherlich lösbar ist, wenn $\mathfrak{E}$ lösbar ist. Sei zunächst K/Ω_0 eine Lösung von $\mathfrak{E}$. Mit $\overline{\Omega}$ werde die perfekte Hülle von Ω bei einer Fortsetzung $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{p}$ auf Ω bezeichnet, mit $\overline{\Omega}_0$ die darin enthaltene perfekte Hülle von Ω_0 und mit Z der Zerlegungskörper $\mathsf{Z} = \overline{\Omega}_0 \frown \Omega$ zu $\mathfrak{P}$. Die Algebra $\overline{\mathsf{K}}$, die aus K/Ω durch



Figur 3

Grundkörpererweiterung auf $\overline{\Omega}$ entsteht, ist jedenfalls über $\overline{\Omega}$ galoisch mit $\mathfrak{A}$. Sie ist aber auch über $\overline{\Omega}_0$ galoissch. $\overline{\mathsf{K}}$ entsteht nämlich aus K/Z durch Grundkörpererweiterung auf $\overline{\Omega}_0$. Und ist $\overline{\mathfrak{g}}$ die Galoisgruppe von Ω/Z (Zerlegungsgruppe zu $\mathfrak{P}$) sowie $\overline{\mathfrak{G}}$ die zu $\overline{\mathfrak{g}}$ gehörige

Zwischengruppe zwischen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{A}$, so ist K/Z galoissch mit $\overline{\mathfrak{G}}$. Also ist auch $\overline{\mathsf{K}}/\overline{\Omega}_0$ galoissch mit der Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$.

Mithin löst $\overline{\mathsf{K}}$ das an der Primstelle $\mathfrak{p}$ von Ω_0 dem Erweiterungsproblem $\mathfrak{E}$ *zugeordnete lokale Erweiterungsproblem* $\mathfrak{E}_\mathfrak{p}$, $\overline{\Omega}/\overline{\Omega}_0$ mit der Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ zu erweitern. Dabei ist die Fortsetzung $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{p}$ beliebig ausgewählt. Für diese Begriffsbildung soll nun der folgende Monodromiesatz bewiesen werden.

Satz 3. *Ein Verkettungssystem für $\mathfrak{E}$ gibt es dann und nur dann, wenn es zu jeder Primstelle $\mathfrak{p}$ von Ω_0 ein Verkettungssystem für $\mathfrak{E}_\mathfrak{p}$ gibt.*

Bemerkung. Aus dem Shoda-Reichardtschen Verzweigungssatz [11], [6] läßt sich herleiten, daß es auf jeden Fall an fast allen Stellen $\mathfrak{p}$ ein Verkettungssystem für $\mathfrak{E}_\mathfrak{p}$ gibt. Kritisch sind nur die $\mathfrak{p}$, die in der Diskriminante von Ω^*/Ω_0 aufgehen, wo Ω^* der Körper der n-ten Einheitswurzeln über Ω ist.

Beweis von Satz 3. Die Existenz eines Verkettungssystems ist nach Delone-Faddeev [3] (für einen anderen Beweis siehe [2], Abschnitt 4) gleichbedeutend damit, daß der verschränkte Gruppenring G von $\mathfrak{G}$ über Ω/Ω_0 über seinem Zentrum zerfällt. Dabei heißt eine halbeinfache Algebra zerfallend über ihrem Zentrum, wenn ihre einfachen Ideale volle Matrixalgebren über (kommutativen!) Körpern sind, wenn also ihre Schurschen Indizes sämtlich gleich 1 sind. Und der verschränkte Gruppenring G ist definiert als Ring der Elemente

$$\sum_{S \text{ aus } \mathfrak{G}} S a_S \qquad (a_S \text{ aus } \Omega)$$

mit den Rechenregeln von $\mathfrak{G}$ und Ω und mit der Vertauschungsregel

$$aS = Sa^S \text{ für } a \text{ aus } \Omega.$$

Er ist eine halbeinfache Algebra über Ω_0.

Nach dem oben genannten Monodromiesatz für einfache Algebren zerfällt eine halbeinfache Algebra R/Ω_0 über ihrem Zentrum dann und nur dann, wenn alle lokalen Ringerweiterungen $R_{\overline{\Omega}_0}$ über ihren Zentren zerfallen. Denn die Erweiterung einer einfachen Algebra auf die perfekte Hülle des Grundkörpers zerlegt sich in die direkte Summe der zentralen Erweiterungen derselben Algebra auf die verschiedenen zugehörigen perfekten Hüllen des Zentrums.

Es ergibt sich also, daß die Existenz eines Verkettungssystems für $\mathfrak{E}$ gleichbedeutend ist damit, daß sämtliche lokalen Ringerweiterungen $G_{\overline{\Omega}_0}$ der Algebra G/Ω_0 über ihren Zentren zerfallen.

Dem lokalen Erweiterungsproblem $\mathfrak{E}_\mathfrak{p}$ entspricht der verschränkte Gruppenring $\overline{G}$ von $\overline{\mathfrak{G}}$ über $\overline{\Omega}/\overline{\Omega}_0$. Zum Beweis von Satz 3 bleibt zu zeigen, daß $\overline{G}$ dann und nur dann über seinem Zentrum zerfällt, wenn $G_{\overline{\Omega}_0}$ über seinem Zentrum zerfällt.

Der verschränkte Gruppenring G enthält den Gruppenring N von $\mathfrak{A}$ über Ω als Gesamtheit der Elemente

$$\sum_{A \text{ aus } \mathfrak{A}} A a_A \qquad (a_A \text{ aus } \Omega),$$

und jedes zweiseitige Ideal von G hat mit N einen von Null verschiedenen Durchschnitt [2]. Entsprechendes gilt für $\overline{G}$. Die Erweiterung $G_{\overline{\Omega}_0}$ enthält die Erweiterung $N_{\overline{\Omega}_0}$ von N/Ω_0, und in dieser insbesondere auch die mit der Gruppe $\mathfrak{g}$ galoissche Algebra $\Omega_{\overline{\Omega}_0}$. Die primitiven Idempotente von $\Omega_{\overline{\Omega}_0}$ sind in bekannter Weise den verschiedenen Fortsetzungen von $\mathfrak{p}$ auf Ω eineindeutig zugeordnet. Es sei ε das primitive Idempotent, das der zuvor ausgewählten Fortsetzung $\mathfrak{P}$ entspricht. Dann ist die Zerlegungsgruppe $\overline{\mathfrak{g}}$ von $\mathfrak{P}$ zugleich

die Galoisgruppe von $\varepsilon\Omega_{\bar{\Omega}_0}/\varepsilon\bar{\Omega}_0$. Die Galois-Automorphismen von $\Omega_{\bar{\Omega}_0}$ werden durch die inneren Automorphismen S von $G_{\bar{\Omega}_0}$ induziert. Die mit ε vertauschbaren Elemente von $\mathfrak{G}$ sind also genau die Elemente V von $\bar{\mathfrak{G}}$.

Der Teilringkette

$$G_{\bar{\Omega}_0} > N_{\bar{\Omega}_0} > \Omega_{\bar{\Omega}_0}$$

entsprechend betrachte man die Teilringkette

$$\varepsilon G_{\bar{\Omega}_0}\varepsilon > \varepsilon N_{\bar{\Omega}_0} > \varepsilon\Omega_{\bar{\Omega}_0} \cong \bar{\Omega}.$$

Aus Ranggründen ist $\varepsilon N_{\bar{\Omega}_0}$ isomorph zum Gruppenring $\bar{N}$ von $\mathfrak{A}$ über $\bar{\Omega}$. Denn für die r verschiedenen primitiven Idempotente ε_i von $\Omega_{\bar{\Omega}_0}$ ist

$$\sum_{i=1}^{r}[\varepsilon_i N_{\bar{\Omega}_0} : \bar{\Omega}_0] = [N_{\bar{\Omega}_0} : \bar{\Omega}_0] = [\bar{N} : \bar{\Omega}]\,[\Omega_{\bar{\Omega}_0} : \bar{\Omega}_0] = [\bar{N} : \bar{\Omega}_0]\,r.$$

Weiter wird $\varepsilon G_{\bar{\Omega}_0}\varepsilon$ über $\varepsilon N_{\bar{\Omega}_0}$ erzeugt durch die $\varepsilon V\varepsilon$ mit V aus $\bar{\mathfrak{G}}$. Denn für $S \notin \bar{\mathfrak{G}}$ ist $\varepsilon S\varepsilon = S\varepsilon^S\varepsilon = 0$. Also setzt sich die Isomorphie $\bar{N} \cong N_{\bar{\Omega}_0}$ zu einer Homomorphie $\bar{G} \to \varepsilon G_{\bar{\Omega}_0}\varepsilon$ fort. Da jedes Ideal von $\bar{G}$ mit $\bar{N}$ einen von Null verschiedenen Durchschnitt hat, ist diese Homomorphie eine Isomorphie:

$$(*) \qquad \varepsilon G_{\bar{\Omega}_0}\varepsilon \cong \bar{G}.$$

Ist nun $\bar{e}$ irgendein primitives Zentrumsidempotent von $G_{\bar{\Omega}_0}$, so gilt

$$\bar{e}\varepsilon \neq 0,$$

weil man aus $S^{-1}\bar{e}\varepsilon S = 0$ auf $\bar{e}\sum_{S \bmod \bar{\mathfrak{G}}}\varepsilon^S = \bar{e}1 = 0$ schließen könnte. $\bar{e}\varepsilon$ ist also ein von Null verschiedenes Idempotent der einfachen Algebra $\bar{e}G_{\bar{\Omega}_0}$. Nach einem bekannten Satz der Algebrentheorie gilt deshalb die Ähnlichkeitsbeziehung im Sinne von R. Brauer:

$$\bar{e}G_{\bar{\Omega}_0} \sim \bar{e}\varepsilon G_{\bar{\Omega}_0}\bar{e}\varepsilon.$$

Wegen (*) folgt hieraus, daß jedes einfache Ideal von $G_{\bar{\Omega}_0}$ zu einem einfachen Ideal von $\bar{G}$ ähnlich ist, und umgekehrt.

Also zerfällt die Algebra $G_{\bar{\Omega}_0}$ über ihrem Zentrum dann und nur dann, wenn $\bar{G}$ über ihrem Zentrum zerfällt. Nach dem zuvor Gesagten ist damit Satz 3 bewiesen.

Bemerkung. Die Monodromie des Erweiterungsproblems ($\mathfrak{E}$ lösbar $\longleftrightarrow$ alle $\mathfrak{E}_\mathfrak{p}$ lösbar) wäre somit eine Folge aus der Vermutung (V.). Insbesondere gilt sie, wenn $\mathfrak{A}$ zyklisch von ungerader Ordnung ist, oder wenn $\mathfrak{A}$ eine zyklische 2-Gruppe, $\mathfrak{G}$ abelsch und der Körper der n-ten Einheitswurzeln über Ω_0 zyklisch ist. Letzteres ist ein Spezialfall eines Ergebnisses von H. Richter [9] für Erweiterungsprobleme mit zyklischer 2-Gruppe $\mathfrak{G}$, das dieser auf anderem Wege gefunden hat.

4. Von H. Richter [9] stammt der folgende Satz über Erweiterungsprobleme mit zyklischer 2-Gruppe $\mathfrak{G}$.

Satz 4. a) *Der Körper der 2^n-ten Einheitswurzeln über Ω_0 sei nicht zyklisch, aber im Kleinen überall zyklisch. $\mathfrak{G}$ sei die zyklische Gruppe der Ordnung 2^{m+n} $(m, n > 0)$. Dann gibt es einen zyklischen Körper Ω/Ω_0 vom Grad 2^m, für den das Erweiterungsproblem $\mathfrak{E}$ von Ω/Ω_0 mit $\mathfrak{G}$ nicht lösbar ist, obwohl alle zugehörigen lokalen Erweiterungsprobleme $\mathfrak{E}_\mathfrak{p}$ lösbar sind.*

b) *Es gibt endlich algebraische Zahlkörper Ω_0, so daß der Körper der 2^3-ten Einheitswurzeln über Ω_0 im Großen nicht zyklisch, im Kleinen aber überall zyklisch ist.*

Zu a) beweist Richter nur die formal schwächere Aussage, daß $\mathfrak{E}$ nicht durch einen Körper K lösbar ist. Es ist noch zu zeigen, daß jede Lösung K dieses speziellen Erweiterungsproblems notwendig ein Körper ist.

Die einfachen Komponenten K_i einer solchen Erweiterungsalgebra K/Ω_0 von Ω/Ω_0 sind alle unter $\mathfrak{A}$ konjugiert, weil K/Ω galoissch mit $\mathfrak{A}$ ist. Bezeichnet andererseits $\mathfrak{G}_0$ die Galoisgruppe einer dieser Komponenten, K_0, innerhalb $\mathfrak{G}$, also die maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$, bei der K_0 zulässig ist, so sind die sämtlichen K_i durch ein Vertretersystem von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{G}_0$ konjugiert. Also enthält $\mathfrak{A}$ ein Vertretersystem von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{G}_0$, d. h. es ist

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0 \mathfrak{A}.$$

Bei einer zyklischen p-Gruppe $\mathfrak{G}$ ist aber eine solche Zerlegung nur in trivialer Weise möglich, d. h. nur mit $\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{G}$ oder $\mathfrak{A} = \mathfrak{G}$. In beiden Fällen besitzt K nur eine einfache Komponente K_0, ist also ein Körper.

Satz 4 liefert die gesuchten Gegenbeispiele gegen die Vermutung (V.*):

Satz 5. *Für jedes der in Satz 4 genannten Erweiterungsprobleme $\mathfrak{E}$ gibt es ein Verkettungssystem, obwohl diese Probleme nicht lösbar sind.*

Der Beweis folgt wegen Satz 4 unmittelbar aus Satz 3.

Bemerkung. Die den $\mathfrak{E}$ aus Satz 5 gemäß Satz 2 zugeordneten Erweiterungsprobleme $\mathfrak{E}^*$ stellen Gegenbeispiele gegen die ursprüngliche Vermutung (V.) dar.

Literatur.

[1] *G. Beyer*, Über relativ-zyklische Erweiterungen galoisscher Körper. Ds. Journ. **196** 34—58 (1956).

[2] *G. Beyer*, Erweiterungsproblem galoisscher Körper und Zerfall einfacher Algebren. Ds. Journ. **195**, 215—220 (1956).

[3] *B. N. Delaunay* and *D. K. Faddeieff* (*Delone* und *Faddeev*), Investigations in the geometry of the Galois theory [russ. mit engl. Zusammenfassung.]. Mat. Sbornik, n. Ser. **15**, 243—284 (1944), insbes. S. 272.

[4] *D. K. Faddeev*, Über eine Vermutung von Hasse [russ.]. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **94**, 1013—1016 (1954).

[5] *H. Hasse*, Existenz und Mannigfaltigkeit abelscher Algebren mit vorgegebener Galoisgruppe über einem Teilkörper des Grundkörpers. I., Math. Nachr. **1**, 40—61 (1948).

[6] *H. Reichardt*, Die Diskriminante einer normalen einfachen Algebra. Ds. Journ. **173**, 31—34 (1935).

[7] *H. Reichardt*, Konstruktion von Zahlkörpern mit gegebener Galoisgruppe von Primzahlpotenzordnung. Ds. Journ. **177**, 1—5 (1937).

[8] *H. Richter*, Über die Lösbarkeit einiger nicht-abelscher Einbettungsprobleme. Math. Ann. **112**, 69—84 (1936).

[9] *H. Richter*, Über die Lösbarkeit des Einbettungsproblems für abelsche Zahlkörper. Math. Ann. **112**, 700—726 (1936).

[10] *Arnold Scholz*, Über die Bildung algebraischer Zahlkörper mit auflösbarer galoisscher Gruppe. Math. Zeitschr. **30**, 332—356 (1929).

[11] *K. Shoda*, Diskriminantenformel für normale einfache hyperkomplexe Systeme. Proc. Imp. Acad. Tokyo **10**, 318—321 (1934).

Eingegangen 5. Juli 1955.

Orthogonale Gruppen über algebraischen Zahlkörpern.

Von *Martin Kneser* in Heidelberg.

§ 1. Fragestellung und Ergebnisse.

Im folgenden seien[1])

$K = \{\alpha, \beta, \ldots\}$	ein Körper, dessen Charakteristik nicht 2 ist;
$R = \{a, b, \ldots\}$	ein n-dimensionaler Vektorraum über K mit einer nicht ausgearteten symmetrischen Bilinearform (x, y), also
$f(x) = (x, x)$	als Funktion der Koordinaten von x eine quadratische Form mit von null verschiedener Determinante;
S^0	der zu einem Unterraum S von R bezüglich (x, y) orthogonale Teilraum;
$O(R) = \{s, t, u, \ldots\}$	die orthogonale Gruppe von $f(x)$, d. h. die Gruppe derjenigen linearen Transformationen — auch Automorphismen genannt —, die f invariant lassen, insbesondere für $f(a) \neq 0$
s_a	die Spiegelung an der zu a orthogonalen Hyperebene, in Formeln $s_a(x) = x - 2(x, a)(a, a)^{-1}a$;
$O^+(R)$	die Untergruppe der eigentlichen Automorphismen (deren Determinante $+1$ ist);
$\Theta(u)$	die Spinornorm des eigentlichen Automorphismus u; ist $u = s_a s_b \cdots s_h$, so ist $\Theta(u)$ die Klasse von $f(a) f(b) \cdots f(h)$ mod K^{*2} in K^*/K^{*2};
$O'(R)$	die Gruppe der eigentlichen Automorphismen mit der Spinornorm 1;
$\Omega(R)$	die Kommutatorgruppe von $O(R)$; sie stimmt für $n \geqq 3$ mit der Kommutatorgruppe von $O^+(R)$ überein;
$Z(R)$	das Zentrum von $O(R)$; es besteht aus der Identität und der Transformation $x \to -x$.

Für diese Gruppen gelten offenbar die Beziehungen $\Omega \cap Z \leqq \Omega \leqq O' \leqq O^+ \leqq O$. Von den Faktorgruppen dieser Reihe hat O/O^+ die Ordnung 2. Ferner ist O^+/O' eine Gruppe vom Exponenten 2, die durch die Spinornorm isomorph auf eine Untergruppe $K^*(R)/K^{*2}$ von K^*/K^{*2} abgebildet wird; dabei ist $K^*(R)$ die von den nichtverschwindenden Produkten $f(a) f(b)$ $(a, b \in R)$ erzeugte Untergruppe von K, insbesondere $K^*(R) = K^*$ wenn R isotrop ist, d. h. wenn die Gleichung $f(x) = 0$ eine Lösung $x \neq 0$ besitzt, da dann auch für jedes Element $\varkappa \neq 0$ aus K die Gleichung $f(x) = \varkappa$ lösbar ist. Die Struktur der beiden nächsten Faktorgruppen ist für isotrope Räume bekannt. Es gelten nämlich die Sätze

[1]) Zusammenfassende Darstellungen der hier vorkommenden Grundbegriffe und -tatsachen findet man in den Werken [6] und [7] des Literaturverzeichnisses am Schluß der Arbeit. Die Bezeichnungen sind im wesentlichen die von [6].

Satz B'. *Für einen isotropen Raum R ist $O'(R) = \Omega(R)$*[2]).

Satz C'. *Ist R isotrop und* $\dim R \geqq 5$, *so ist die Faktorgruppe $\Omega(R)/\Omega(R) \cap Z(R)$ einfach*[3]).

Auch wenn der isotrope Raum R die Dimension 3 oder 4 hat, übersieht man die Struktur der Faktorgruppe $\Omega(R)\Omega/(R) \cap Z(R)$; die Verhältnisse liegen hier etwas komplizierter[3]). Für $\dim R \leqq 2$ ist $O^+(R)$, also auch $\Omega(R)$, abelsch. Die letzte Gruppe $\Omega \cap Z$ schließlich läßt sich allgemein angeben, wenn $O'(R) = \Omega(R)$ ist. Die Gruppe $O'(R) \cap Z(R)$ hat nämlich die Ordnung 2, wenn die Dimension von R gerade ist und die Determinante von $f(x)$ ein Quadrat ist, die Ordnung 1 in allen anderen Fällen[2]).

Wenn der Raum R anisotrop ist, so hängt die Struktur der Gruppe $O(R)$ wesentlich von der Art des Grundkörpers K ab. Für anisotrope Räume gelten die Sätze B' und C' zwar auch noch wenn K der Körper der reellen Zahlen ist, aber nicht für diskret bewertete perfekte Körper K[4]). Wenn K ein algebraischer Zahlkörper ist, so taucht die Frage auf[5]), wie die orthogonale Gruppe eines Raumes R mit den orthogonalen Gruppen seiner $\mathfrak{p}$-adischen Hüllen $R_\mathfrak{p}$ zusammenhängt, insbesondere, ob die Sätze B' und C' für R gelten, wenn sie für alle $R_\mathfrak{p}$ gelten. Dieudonné[6]) hat diese Frage im Falle des Satzes C' beantwortet für Räume, deren Dimension genügend groß ist — z. B. für $\dim R \geqq 6$ falls K der rationale Zahlkörper ist; bei anderen algebraischen Zahlkörpern liegt die Schranke für die Dimension höher. In der vorliegenden Arbeit soll diese Frage beantwortet werden für alle Räume, deren Dimension mindestens 5 ist. Unbeantwortet bleibt sie nur für gewisse Räume der Dimensionen 3 und 4 — Dimensionszahlen, die ja auch sonst bei orthogonalen Gruppen eine Ausnahmerolle spielen.

Von jetzt ab seien

K ein algebraischer Zahlkörper,

$K_\mathfrak{p}$, $R_\mathfrak{p}$ die perfekten Hüllen von K, R für eine (endliche oder unendliche) Primstelle $\mathfrak{p}$ von K.

Als Antwort auf die oben gestellte Frage nach der Struktur der Gruppe $O(R)$ beweisen wir die folgenden drei Sätze, welche die Faktorgruppen O^+/O', O'/Ω und $\Omega/\Omega \cap Z$ betreffen. Dabei sind die beiden ersten Sätze auch wesentliche Hilfsmittel zum Beweis des dritten.

Satz A. *Es seien $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_r$ diejenigen unendlichen reellen Primstellen, für welche $f(x)$ (positiv oder negativ) definit ist. Ist* $\dim R \geqq 3$, *so wird die Faktorgruppe $O^+(R)/O'(R)$ durch die Spinornorm isomorph auf die Gruppe $K^*(R)/K^{*2}$ abgebildet, wo $K^*(R)$ aus denjenigen Zahlen von K besteht, die für $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_r$ positiv sind.*

Satz B. *Für* $\dim R \neq 4$ *ist $O'(R) = \Omega(R)$.*

Für vierdimensionale Räume gilt dies im allgemeinen nicht mehr. Wenn nämlich $R_\mathfrak{p}$ anisotrop ist für eine endliche Primstelle $\mathfrak{p}$, so ist $O'(R_\mathfrak{p}) \neq \Omega(R_\mathfrak{p})$[7]) und daher auch $O'(R) \neq \Omega(R)$. In diesem Fall kann man zeigen, daß $\Omega(R) = \bigcap_\mathfrak{p} (\Omega(R_\mathfrak{p}) \cap O(R))$ und die Faktorgruppe $O'(R)/\Omega(R)$ dem direkten Produkt $\prod_\mathfrak{p} O'(R_\mathfrak{p})/\Omega(R_\mathfrak{p})$ isomorph ist.

Satz C. *Für* $\dim R \geqq 5$ *ist die Faktorgruppe $P\Omega(R) = \Omega(R)/\Omega(R) \cap Z(R)$ einfach.*

Bei drei- oder vierdimensionalen Räumen ist $P\Omega(R)$ sicher nicht einfach, wenn $R_\mathfrak{p}$ für mindestens eine endliche Primstelle $\mathfrak{p}$ anisotrop ist. Die Frage, ob $P\Omega(R)$ einfach ist,

---

[2]) [6], II, § 8; [7], §§ 3, 4.
[3]) [6], II, § 9; [7], § 3.
[4]) [6], II, § 12; [7], S. 57; [8].
[5]) [1], S. 39.
[6]) [2], [3], [4].
[7]) [8].

bleibt also offen für solche anisotropen Räume R, für die dim R gleich 3 oder 4 und $R_\mathfrak{p}$ isotrop ist für alle endlichen Primstellen $\mathfrak{p}$. Einige Teile des Beweises von Satz C gelten auch noch in diesen Fällen; die entscheidenden Hilfssätze 2 und 3 benützen allerdings wesentlich die Voraussetzung dim $R \geqq 5$.

Diese Ergebnisse über orthogonale Gruppen ziehen entsprechende Sätze über unitäre Gruppen nach sich, die hier ohne Beweis angegeben seien. Es sei K eine quadratische Erweiterung des algebraischen Zahlkörpers k, f eine hermitesche Form in n Variabeln über K/k, $U(K, f)$ die unitäre Gruppe von f, $U^+(K, f)$ die eigentlich unitäre Gruppe (der Transformationen aus $U(K, f)$ mit der Determinante 1), $U'(K, f)$ die Kommutatorgruppe von $U(K, f)$, $Z(K, f)$ das Zentrum von $U(K, f)$. Den Sätzen A, B, C entsprechen die folgenden drei Sätze, von denen der erste bekannt ist.

Satz A″. *Die Faktorgruppe $U(K, f)/U^+(K, f)$ wird durch die Determinante isomorph auf die Gruppe der Zahlen ε aus K mit $N_{K/k}\varepsilon = 1$ abgebildet.*

Satz B″. *Für $n \geqq 5$ ist $U^+(K, f) = U'(K, f)$.*

Satz C″. *Für $n \geqq 5$ ist die Faktorgruppe $PU'(K, f) = U'/U' \cap Z$ einfach.*

Die Sätze B″ und C″ können ähnlich wie in [3] mittels der bekannten Isomorphie zwischen 4-dimensionalen unitären und 6-dimensionalen orthogonalen Gruppen ([5], Nr. 33) bewiesen werden. Eine andere Möglichkeit ist, die Beweise für die orthogonalen Gruppen direkt nachzubilden. Auf diese Weise ist mir allerdings nur der Beweis von C″, nicht der von B″, gelungen. Dafür hat diese Methode den Vorteil, daß sie sich auch auf den Fall übertragen läßt, daß f eine hermitesche Form ist über einem Schiefkörper K mit einem involutorischen Antiautomorphismus, falls K von endlichem Rang über einem algebraischen Zahlkörper ist.

§ 2. Zwei Hilfssätze.

Zum Beweis der Sätze A, B und C, den wir im nächsten Paragraphen in Angriff nehmen wollen, brauchen wir zwei Hilfssätze, die auch an sich interessant sind. Der erste ist ein Analogon für orthogonale Gruppen zum Approximationssatz für algebraische Zahlen. Die Bezeichnungen seien dieselben wie in § 1, K ein algebraischer Zahlkörper, $\mathfrak{p}$ eine Primstelle von K; ferner seien $u, u_1, u_2, \ldots$ Automorphismen von $R_\mathfrak{p}$, die wir uns, auf eine feste Basis von $R_\mathfrak{p}$ bezogen, als Matrizen geschrieben denken. Wir sagen dann die Folge $u_1, u_2, \ldots$ konvergiere $\mathfrak{p}$-adisch gegen u, in Formeln $\mathfrak{p}\text{-}\lim\limits_{\nu\to\infty} u_\nu = u$, wenn dies für die einzelnen Matrixelemente gilt. Dann gilt der

Approximationssatz. *Es seien endlich viele Primstellen $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_r$ von K gegeben und zu jeder dieser Primstellen ein eigentlicher Automorphismus $u_{\mathfrak{p}_i}$ von $R_{\mathfrak{p}_i}$. Dann gibt es eine Folge $u_1, u_2, \ldots$ von eigentlichen Automorphismen von R mit $\mathfrak{p}_i\text{-}\lim\limits_{\nu\to\infty} u_\nu = u_{\mathfrak{p}_i}$; liegen die $u_{\mathfrak{p}_i}$ in $\Omega(R_{\mathfrak{p}_i})$, so können die u_ν in $\Omega(R)$ gewählt werden.*

Beweis. $u_{\mathfrak{p}_i}$ läßt sich als Produkt einer geraden Anzahl von Spiegelungen schreiben; durch Hinzufügen trivialer Faktoren $s_a s_a = 1$ können wir dabei erreichen, daß deren Anzahl für alle $\mathfrak{p}_i$ die gleiche ist. Sind $a_{\mathfrak{p}_i}, b_{\mathfrak{p}_i}, \ldots, h_{\mathfrak{p}_i}$ die zu den Spiegelungshyperebenen orthogonalen Vektoren, so setzen wir u_ν in der Form $u_\nu = s_{a_\nu} s_{b_\nu} \cdots s_{h_\nu}$ mit $a_\nu, b_\nu, \ldots, h_\nu$ aus R an. Hat die Folge $a_1, a_2, \ldots$ die Eigenschaft, daß $\mathfrak{p}_i\text{-}\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = a_{\mathfrak{p}_i}$ ist, und entsprechend für die anderen Folgen, so gilt $\mathfrak{p}_i\text{-}\lim\limits_{\nu\to\infty} u_\nu = u_{\mathfrak{p}_i}$. Eine solche Folge a_ν gibt es

aber: Man braucht nur die Koordinaten von $a_{\mathfrak{p}_i}$ nach dem Approximationssatz für algebraische Zahlen durch Zahlen aus K zu approximieren und diese dann als Koordinaten von a_ν zu wählen. Liegt $u_{\mathfrak{p}_i}$ in $\Omega(R_{\mathfrak{p}_i})$, so läßt es sich als Produkt von Kommutatoren $s_x^{-1}s_y s_x s_y^{-1}(x, y \in R_{\mathfrak{p}_i})$ je zweier Spiegelungen schreiben. Auf die hierin vorkommenden Vektoren $x, y, \ldots$ kann man das gleiche Approximationsverfahren anwenden und erhält dann eine Folge $u_\nu \in \Omega(R)$ mit $\mathfrak{p}_i\text{-}\lim\limits_{\nu\to\infty} u_\nu = u_{\mathfrak{p}_i}$.

Der zweite Hilfssatz bezieht sich auf Räume über $\mathfrak{p}$-adischen Körpern und besagt ungefähr, daß zwei Räume isomorph sind, wenn sich ihre Bilinearformen nur wenig voneinander unterscheiden. Genauer gilt mit den Bezeichnungen von § 1, wo K ein durch eine Betragsfunktion $|a|$ diskret bewerteter perfekter Körper ist, der

Stetigkeitssatz: *Ist $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis von R, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit folgender Eigenschaft: Ist S ein anderer n-dimensionaler Raum über K mit der Basis $f_1, \ldots, f_n$ und ist $|(f_i, f_k) - (e_i, e_k)| < \varepsilon$, so sind R und S isomorph.*

In der folgenden gleichwertigen Form ist er aus der Theorie der quadratischen Formen bekannt.

Ist $\sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k$ eine quadratische Form mit nicht verschwindender Determinante, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit der Eigenschaft, daß aus $|a'_{ik} - a_{ik}| < \varepsilon$ folgt: Die quadratischen Formen $\sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k$ und $\sum\limits_{i,k=1}^{n} a'_{ik}x_i x_k$ sind äquivalent.

Dabei sind bei der Äquivalenz beliebige (nicht notwendig ganzzahlige) Transformationen zugelassen, obwohl der Satz auch für die engere Äquivalenz mittels unimodularer Transformationen gültig bleibt.

Beweis. Es sei $D_h = |a_{ik}|_{(i,k=1,\ldots,h)}$ und wir setzen zunächst voraus, daß alle D_h von Null verschieden sind. Dann ist $\sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k$ äquivalent zu $\sum\limits_{h=1}^{n} D_h D_{h-1}^{-1} x_h^2$ und Entsprechendes gilt für die gestrichenen Größen. Ist nun ε klein genug, so unterscheiden sich $D_h D_{h-1}^{-1}$ und $D'_h D'^{-1}_{h-1}$ nur um einen quadratischen Faktor und daraus folgt die Äquivalenz der beiden Formen. Den Fall, daß nicht alle $D_h \neq 0$ sind, können wir auf den eben behandelten zurückführen, indem wir $\sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k$ auf Diagonalgestalt transformieren und dieselbe Transformation auf $\sum\limits_{i,k=1}^{n} a'_{ik}x_i x_k$ anwenden.

§ 3. Beweis der Sätze A, B und C.

Beweis von Satz A. Die Spinornorm bildet $O^+(R)$ homomorph in K^*/K^{*2} ab. Der Kern dieses Homomorphismus ist definitionsgemäß $O'(R)$. Es bleibt also nur sein Bild zu bestimmen. Daß die Spinornorm eines Automorphismus $t \in O^+(R)$ in $K^*(R)/K^{*2}$ liegt, ist klar, da jedes Produkt einer geraden Anzahl von Faktoren $f(a)$ $(a \in R)$ in $K_{\mathfrak{p}_i}$ positiv ist. Um zu zeigen, daß umgekehrt auch jede solche Quadratklasse als Spinornorm auftritt, bemerken wir, daß $f(x)$ wegen $\dim R \geqq 3$ in allen Körpern $K_{\mathfrak{p}}$ außer endlich vielen jede Zahl darstellt[8]). Die Ausnahmen sind einmal die Körper $K_{\mathfrak{p}_i}$, in denen $f(x)$ nur die Zahlen eines festen Vorzeichens darstellt, zum andern (im Fall $\dim R = 3$) gewisse $K_{\mathfrak{q}_i}$ ($\mathfrak{q}_i$ endliche Primstellen), in denen $f(x)$ alle Zahlen außer denen einer be-

[8]) [7], § 23.

stimmten Restklasse δ_i mod $K_{\mathfrak{q}_i}^{*2}$ darstellt[9]). Ist nun $\gamma \in K$ positiv für $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_r$, so wähle man eine Zahl $\alpha \in K$, die von $f(x)$ in $K_{\mathfrak{p}_i}$ $(i = 1, \ldots, r)$ dargestellt wird und in keiner der Restklassen δ_i oder $\gamma\delta_i^{-1}$ mod $K_{\mathfrak{q}_i}^{*2}$ liegt; das kommt auf endlich viele Approximationsforderungen an α heraus und ist daher möglich. Dann wird sowohl α als auch $\beta = \alpha^{-1}\gamma$ von $f(x)$ in allen Körpern $K_{\mathfrak{p}}$, also[10]) auch in K dargestellt. Es gilt demnach $\gamma = \alpha\beta = f(a)\,f(b) \equiv \Theta(s_a s_b)$ mod K^{*2} und das beweist die Behauptung.

Beweis von Satz B. Es sei zunächst dim $R \leqq 3$. Dann läßt sich jeder eigentliche Automorphismus t als Produkt zweier Spiegelungen s_a und s_b schreiben und es wird $\Theta(t) \equiv f(a)\,f(b)$ mod K^{*2}. Ist $t \in O'(R)$, so ist also $f(a)\,f(b) = \varkappa^2$ ein Quadrat, und indem wir b durch $\varkappa f(b)^{-1} b$ ersetzen — was an der Spiegelung s_b nichts ändert —, können wir $f(a) = f(b)$ erreichen. Dann gibt es aber einen Automorphismus u von R, der a in b überführt, und es folgt $s_b = s_{u(a)} = u s_a u^{-1}$, also $s_a s_b = s_a^{-1} u s_a u^{-1} \in \Omega(R)$, wie behauptet. Wenn dim $R \geqq 5$ ist, so schreiben wir t wieder als Produkt von Spiegelungen: $t = s_a s_b \cdots s_h$ und suchen nun einen zweidimensionalen Teilraum S von R, der Vektoren $a', b', \ldots, h'$ enthält mit $f(a') = f(a)$, $f(b') = f(b)$ usw. Dann sind s_a und $s_{a'}$ in $O(R)$ konjugiert, ebenso s_b und $s_{b'}$ usw. Der Automorphismus $t' = s_{a'} s_{b'} \cdots s_{h'}$ ist dann zu t kongruent modulo $\Omega(R)$ und hat die Spinornorm 1. Da er den zu S orthogonalen Raum fest läßt, können wir ihn als Element von $O(S)$ auffassen und das oben bewiesene Ergebnis anwenden. Wir erhalten $t' \in \Omega(S) \subseteq \Omega(R)$ und damit auch $t \in \Omega(R)$.

Es bleibt noch der Raum S zu konstruieren. Dazu suchen wir zunächst eine binäre quadratische Form, welche die Zahlen $f(a), f(b), \ldots, f(h)$ darstellt; wir setzen sie in der Gestalt $g(x_1, x_2) = f(a)\,(x_1^2 - \delta x_2^2)$ an und haben dann die Bedingung, daß $f(b)\,f(a)^{-1}, \ldots, f(h)\,f(a)^{-1}$ Normen von Zahlen des Erweiterungskörpers $K(\sqrt{\delta})$ sein müssen. Das ist aber gleichbedeutend damit, daß δ Norm bei jeder der Körpererweiterungen $K(\sqrt{f(b)\,f(a)^{-1}})/K, \ldots, K(\sqrt{f(h)\,f(a)^{-1}})/K$ ist und das ist sicher dann der Fall, wenn δ Norm einer Zahl λ aus $L = K(\sqrt{f(b)\,f(a)^{-1}}, \ldots, \sqrt{f(h)\,f(a)^{-1}})$ ist. Es bleibt zu prüfen, ob g die einem zweidimensionalen Teilraum von R zugeordnete quadratische Form ist. Das ist genau dann der Fall, wenn es für jede $\mathfrak{p}$-adische Erweiterung $R_{\mathfrak{p}}$ zutrifft. Ist $\mathfrak{p}$ endlich oder komplex unendlich, so ist diese Bedingung von selbst erfüllt, da über solchen Körpern $K_{\mathfrak{p}}$ jede quinäre quadratische Form jede binäre darstellt. Ist $\mathfrak{p}$ reell unendlich, so unterscheiden wir zwei Fälle. Ist $f(x)$ in $K_{\mathfrak{p}}$ indefinit, so können wir annehmen, daß von den Quotienten $f(b)\,f(a)^{-1}, \ldots, f(h)\,f(a)^{-1}$ mindestens einer negativ ist — notfalls können wir das durch Hinzunahme weiterer Vektoren aus R erreichen. Dann sind alle Fortsetzungen von $\mathfrak{p}$ in L komplex und daher $\delta = N_{L/K}\lambda$ in $K_{\mathfrak{p}}$ positiv; also ist g über $K_{\mathfrak{p}}$ indefinit und wird daher in $K_{\mathfrak{p}}$ von f dargestellt. Ist schließlich $f(x)$ in $K_{\mathfrak{p}}$ definit, so sind die Zahlen $f(b)\,f(a)^{-1}, \ldots, f(h)\,f(a)^{-1}$ positiv; alle Fortsetzungen von $\mathfrak{p}$ in L sind daher reell und wir können erreichen, daß $\delta = N_{L/K}\lambda$ in $K_{\mathfrak{p}}$ negativ und damit g in $K_{\mathfrak{p}}$ definit wird mit dem gleichen Vorzeichen wie f. Dann sind alle lokalen Bedingungen erfüllt, und daher ist g die einem gewissen zweidimensionalen Teilraum S von R zugeordnete quadratische Form wie behauptet.

Den *Beweis von Satz C* führen wir in mehreren Schritten. Da der Satz C′ bekannt ist, setzen wir R anisotrop voraus. Wir wollen zeigen, daß jeder Normalteiler N von $\Omega(R)$, der nicht im Zentrum enthalten ist, gleich $\Omega(R)$ ist. Wir zeigen zunächst

Hilfssatz 1. *N enthält eine von der Identität verschiedene ebene Drehung.*

Einen Beweis findet man in [2], S. 85. Der Vollständigkeit halber sei der folgende etwas einfachere Beweis angeführt. Es sei $u \in N$ nicht in Z enthalten. Dann gibt es eine

[9]) [7], § 7. [10]) [7], Satz 23. 5.

Ebene T, die von u nicht in sich übergeführt wird. Ist $t \neq 1$ eine ebene Drehung mit der Drehebene T und der Spinornorm 1, so liegt t in Ω, also $v = t^{-1}utu^{-1}$ in N. Aus $uT \neq T$ folgt $utu^{-1} \neq t$, also $v \neq 1$. Außerdem läßt v den zu $T + uT$ orthogonalen Teilraum elementweise fest; wegen $\dim R \geqq 5$ ist dieser nicht leer. Ist V der Fixraum von v, V^0 sein orthogonales Komplement, so wählen wir zwei Vektoren x aus V und y aus V^0 und betrachten die von x und y aufgespannte Ebene S. Sei $s \neq \pm 1$ eine ebene Drehung mit der Drehebene S und Spinornorm 1. Dann liegt $w = s^{-1}vsv^{-1}$ in N und läßt den zu $S + vS$ orthogonalen Teilraum elementweise fest. Wegen $x \in S \cap vS$ ist $\dim (S + vS) \leqq 3$, also w als eigentlicher Automorphismus eines dreidimensionalen Raumes eine ebene Drehung. Bleibt zu zeigen, daß $w \neq 1$ ist. Ist $vS \neq S$, so folgt dies wie oben für v. Ist aber $vS = S$, so ist $v(S \cap V^0) = vS \cap vV^0 = S \cap V^0$, also $vy = \pm y$. Das Pluszeichen scheidet aus, da y nicht in V liegt; wegen $vx = x$ ist dann v auf S eine Spiegelung und daher nicht mit s vertauschbar, was die Behauptung beweist.

Hilfssatz 2. *N enthält einen Normalteiler von $O(R)$.*

Beweis. $w \in N$ sei eine von der Identität verschiedene ebene Drehung mit der Drehebene W. Wir behandeln zunächst den Fall, daß für jede reelle unendliche Primstelle $\mathfrak{p}$ der Raum $R_\mathfrak{p}$ und das orthogonale Komplement $W_\mathfrak{p}^0$ von $W_\mathfrak{p}$ entweder beide definit oder beide indefinit sind. Die Spinornormen von Elementen aus $O^+(W^0)$ sind dann nach Satz A dieselben wie die von Elementen aus $O^+(R)$; nach Satz B folgt daraus $O^+(R) = O^+(W^0)\,O'(R) = O^+(W^0)\,\Omega(R)$ und daher $O(R) = O(W^0)\,\Omega(R)$. Der Zentralisator $Z(w)$ von w in $O(R)$ enthält offenbar $O(W^0)$, so daß auch $O(R) = Z(w)\,\Omega(R)$ gilt. Das besagt aber, daß jedes zu w unter $O(R)$ konjugierte Element schon unter $\Omega(R)$ zu w konjugiert ist, daß also der von w erzeugte Normalteiler von $O(R)$ in N liegt, und das beweist die Behauptung.

Erfüllt die Drehung w noch nicht die obige Bedingung, so verschaffen wir uns eine geeignete ebene Drehung aus N auf folgende Weise. Es sei V ein dreidimensionaler, W umfassender Teilraum von R. Für jede reelle Primstelle $\mathfrak{p}$, für die $R_\mathfrak{p}$ indefinit ist, gibt es eine Ebene $U_\mathfrak{p}$ in $V_\mathfrak{p}$ derart, daß $U_\mathfrak{p}^0$ indefinit ist. $u_\mathfrak{p} \in \Omega(V_\mathfrak{p})$ sei eine von der Identität verschiedene Drehung mit der Drehebene $U_\mathfrak{p}$. Dann läßt sich $u_\mathfrak{p}$ als Produkt von Elementen der Form $sws^{-1}tw^{-1}t^{-1}$ mit s und t aus $\Omega(V_\mathfrak{p})$ schreiben; denn diese Produkte bilden einen nicht in $Z(V_\mathfrak{p})$ enthaltenen Normalteiler von $\Omega(V_\mathfrak{p})$ und der einzige derartige Normalteiler ist $\Omega(V_\mathfrak{p})$ selbst[11]). Das machen wir für alle reellen Primstellen $\mathfrak{p}$ und können dabei durch Hinzufügen trivialer Faktoren ($s = t = 1$) erreichen, daß für alle $\mathfrak{p}$ die gleiche Anzahl von Faktoren auftritt. Approximieren wir nun die auftretenden Elemente $s, t, \ldots$ aus $\Omega(V_\mathfrak{p})$ nach dem Approximationssatz durch Elemente aus $\Omega(V)$, so erhalten wir ein Element u aus N, das sich als Automorphismus von $V_\mathfrak{p}$ betrachtet, nur wenig von u unterscheidet. Als von der Identität verschiedene eigentlich orthogonale Transformation eines dreidimensionalen Raumes besitzt u einen bis auf Skalarfaktoren eindeutig bestimmten Fixvektor x. Legt man eine feste Basis von V zugrunde, so berechnen sich seine Koordinatenverhältnisse rational aus den Matrixelementen von u und unterscheiden sich daher in $K_\mathfrak{p}$ nur wenig von den Koordinatenverhältnissen des Fixvektors von $u_\mathfrak{p}$. Daraus folgt, daß die zu x in $V_\mathfrak{p}$ senkrechte Ebene — die Drehebene von u — isomorph zur Drehebene von $u_\mathfrak{p}$, d. h. zu $U_\mathfrak{p}$ ist. u erfüllt damit die oben an w gestellten Forderungen.

Auf Grund des Hilfssatzes 2 können wir uns jetzt auf Normalteiler N von $O(R)$ beschränken und haben dann zu zeigen, daß $\Omega(R)$ in N enthalten ist. Nennen wir eine Hyperebene S universell, wenn die zu S gehörige quadratische Form dieselben (und

[11]) Das entnimmt man dem Beweis für die Einfachheit von $P\Omega(V_\mathfrak{p})$; vgl. Fußnote [3]).

nicht weniger) Zahlen darstellt wie $f(x)$, so ist ein wesentlicher Schritt in Richtung auf unser Ziel der

Hilfssatz 3. *Ist $f(a) = f(b)$, $a \neq \pm b$, und die Symmetriehyperebene S von a und b universell, so gibt es ein Element t in N mit $ta = b$.*

Beweis. Es sei u ein Element von N. Wir suchen einen Vektor c mit $f(c) = f(a)$, $(a, c) = (b, c) = (a, ua)$; seine Existenz bei geeigneter Wahl von u werden wir noch nachweisen. Nach dem Wittschen Isomorphiesatz gibt es Automorphismen v und w von R mit $va = a$, $vua = c$ und $wa = b$, $wua = c$. Dann gilt $vuv^{-1}(a) = c$ und $wuw^{-1}(b) = c$; also erfüllt $t = (wuw^{-1})^{-1}(vuv^{-1})$ die Bedingungen des Hilfssatzes.

Um den Vektor c zu finden machen wir folgende Konstruktion. R' sei ein dreidimensionaler Vektorraum über K, der von Vektoren a', b', c' aufgespannt wird und auf dem durch $(a', a') = (b', b') = (c', c') = (a, a)$, $(a', b') = (a, b)$, $(a', c') = (b', c') = (a, ua)$ eine symmetrische Bilinearform definiert sei. Unsere Aufgabe ist es dann, die Abbildung $a' \to a$, $b' \to b$ zu einem Isomorphismus von R' in R fortzusetzen. Für den von a' und b' aufgespannten Teilraum geht das durch lineare Fortsetzung. Es genügt daher, die Abbildung auf den zu a' und b' senkrechten Vektor d' fortzusetzen. Wir brauchen dazu einenV ektor d in dem zu a und b orthogonalen Teilraum T von R, für den $(d, d) = (d', d')$ ist. Einen solchen Vektor gibt es in T genau dann, wenn es für jedes $\mathfrak{p}$ in $T_\mathfrak{p}$ einen gibt, und das ist sicher der Fall, wenn $T_\mathfrak{p}$ isotrop ist, also wegen $\dim T = \dim R - 2 \geqq 3$ für fast alle $\mathfrak{p}$. Für die endlich vielen Ausnahmen braucht es zunächst nicht so zu sein. Nach dem Wittschen Isomorphiesatz ist es genau dann der Fall, wenn es in $R_\mathfrak{p}$ einen zu $R'_\mathfrak{p}$ isomorphen Unterraum gibt, und das können wir folgendermaßen durch geeignete Wahl von u erreichen. Da die Symmetriehyperebene S von a und b universell ist, gibt es einen Vektor e in S mit $f(e) = f(a)$, also einen Automorphismus v von R, der a in e überführt. Vor dieses v können wir, ohne die Eigenschaft $va \in S$ zu zerstören, solche Automorphismen von R als Faktor setzen, die S in sich überführen. Auf diese Weise können wir zunächst erreichen, daß v in $O^+(R)$ liegt. Da die Automorphismen von S als Spinornormen die gleichen Quadratklassen besitzen wie die von R, können wir weiter erreichen, daß v sogar in $O'(R)$, also nach Satz B in $\Omega(R)$ liegt. Schließlich können wir noch durch Anbringung eines Faktors aus $\Omega(S)$ dafür sorgen, daß va nicht in der von a und b aufgespannten Ebene liegt. Als wichtigste Eigenschaften haben wir also $v \in \Omega(R)$ und $va \in S$, d. h. $(a, va) = (b, va)$. Nun sei w ein nicht im Zentrum gelegenes Element von N. Wie beim Beweis des Hilfssatzes 2 läßt sich dann v als Produkt von Elementen der Form $sws^{-1}tw^{-1}t^{-1}$ mit s und t aus $\Omega(R_\mathfrak{p})$ schreiben. Wie dort kann man daher v an den endlich vielen Ausnahmeprimstellen durch ein Element u aus N approximieren. Dieses erfüllt dann unsere Bedingungen, denn für die Ausnahmeprimstellen $\mathfrak{p}$ ist nach dem Stetigkeitssatz (§ 2) $R'_\mathfrak{p}$ isomorph zu dem von a, b und va aufgespannten Teilraum von $R_\mathfrak{p}$, falls nur die Approximation von u an v gut genug ist; die Skalarprodukte zwischen den Vektoren a', b' und c' stimmen nämlich mit den entsprechenden Produkten zwischen a, b und va überein mit Ausnahme von (a', c') und (b', c'), die nach Definition beide gleich (a, ua) sind und sich daher von $(a, va) = (b, va)$ $\mathfrak{p}$-adisch nur wenig unterscheiden.

Hilfssatz 4. *Sind s_a und s_b Spiegelungen an zwei Hyperebenen, und ist eine von ihnen — etwa die erste — universell, so liegt der Kommutator $s_a^{-1}s_bs_as_b^{-1}$ in N.*

Beweis. Der Zentralisator $Z(s_b)$ besteht aus allen Transformationen, die b in $\pm b$ überführen. Ist $s_a(b) = \pm b$, so sind also s_a und s_b vertauschbar und daher ist nichts zu beweisen. Anderenfalls gibt es nach Hilfssatz 3 ein Element t in N mit $t(b) = s_a(b)$. Also liegt $t^{-1}s_a = z$ in $Z(s_b)$ und daher $s_a^{-1}s_bs_as_b^{-1} = z^{-1}(t^{-1}s_bts_b^{-1})\,z$ in N wie behauptet.

Den Schluß des Beweises liefert jetzt der

Hilfssatz 5. *$\Omega(R)$ wird von den speziellen Kommutatoren aus Hilfssatz 4 erzeugt.*

Beweis. Die universellen Hyperebenen S sind dadurch gekennzeichnet, daß $S_\mathfrak{p}$ indefinit ist für jede reelle Primstelle $\mathfrak{p}$, für die $R_\mathfrak{p}$ indefinit ist; für den auf S orthogonalen Vektor a besagt dies, daß $f(a) > 0$ bzw. < 0 sein muß in $K_\mathfrak{p}$, wenn $R_\mathfrak{p}$ die Signatur $(n-1, 1)$ bzw. $(1, n-1)$ hat. Nun zum Beweis! $\Omega(R)$ wird erzeugt von den Kommutatoren $u = s^{-1}tst^{-1}$ zweier Spiegelungen s und t; das sind gerade die ebenen Drehungen mit der Spinornorm 1. In der Drehebene U von u gibt es einen Vektor a, der zu einer universellen Hyperebene orthogonal ist — das läuft ja nach der obigen Charakterisierung nur auf eine Approximationsforderung hinaus. Dann ist aber $s_a^{-1}u$ eine Spiegelung s_c, d. h. $u = s_a s_c = s_a^{-1} s_c$; wegen $\Theta(u) = 1$ kann hier $f(c) = f(a)$ gewählt werden. Dann gibt es aber eine Spiegelung s_b, die a und c vertauscht, und daraus folgt $s_c = s_b s_a s_b^{-1}$, also $u = s_a^{-1} s_b s_a s_b^{-1}$ wie behauptet.

Literaturverzeichnis.

[1] *J. Dieudonné*, Sur les groupes classiques (Actual. Scient. et Ind. 1040), Paris: Hermann 1948.

[2] *J. Dieudonné*, On the orthogonal groups over the rational field, Ann. of Math. **54** (1951), 85—93.

[3] *J. Dieudonné*, Orthogonal and unitary groups over the rational field, Am. J. Math. **73** (1951), 940—948.

[4] *J. Dieudonné*, On the orthogonal groups over an algebraic number field, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **2** (1952), 245—256.

[5] *J. Dieudonné*, Les extensions quadratiques des corps non commutatifs et leurs applications, Acta math. **87** (1952), 175—242.

[6] *J. Dieudonné*, La géométrie des groupes classiques, (Erg. d. Math.) Springer-Verlag 1955.

[7] *M. Eichler*, Quadratische Formen und orthogonale Gruppen, Springer-Verlag 1952.

[8] *M. Kneser*, Einheitengruppen quadratischer Formen über diskret bewerteten perfekten Körpern, erscheint demnächst.

Eingegangen 23. August 1955.